

# Formelsammlung Mathematik für Gymnasien

Autor: dipl. math. Helmut Vetter

FSGym©HelmutVetter/V1.34

<https://formel-vetter.jimdo.com/>

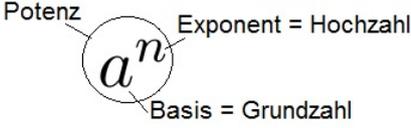
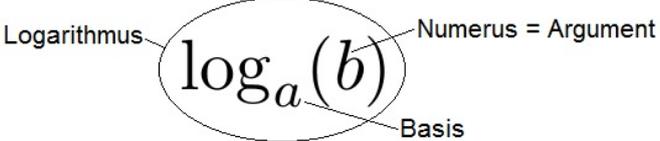
Druckempfehlung: Broschürendruck A4 oder A5 mit Sattelheftung

# Inhaltsverzeichnis

1	Algebra	3
2	Trigonometrie	6
3	Komplexe Zahlen	7
4	Planimetrie	8
5	Stereometrie	9
6	Analytische Geometrie der Ebene	12
7	Vektorgeometrie (im Raum)	13
8	Grenzwerte	16
9	Differentialrechnung	17
10	Integralrechnung	19
11	Kombinatorik	21
12	Wahrscheinlichkeitsrechnung	22
13	Beschreibende Statistik	26
14	Das Griechische Alphabet	27
15	Mathematische Symbole	27

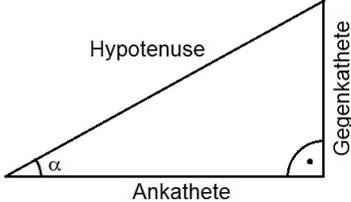
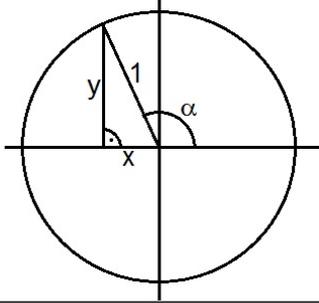
## 1 Algebra

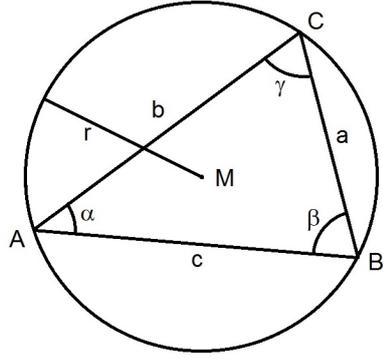
Zahlen- mengen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Menge der <i>natürlichen Zahlen</i> $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ Menge der <i>ganzen Zahlen</i> $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}$ Menge der <i>rationalen Zahlen</i> (Brüche) $\mathbb{R} = \text{reelle Zahlengerade}$ Menge der <i>reellen Zahlen</i> (Kommazahlen) <hr/> $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R}\} = \text{komplexe Zahlenebene}$ Menge der <i>komplexen Zahlen</i>
Binomi- scher Lehrsatz	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ <hr/> $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$ $(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^n (\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Fakul- täten, Binomial- koeffi- zienten	<b>Fakultäten</b> $n! = n \text{ Fakultät} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ $0! = 1$ <hr/> <b>Binomialkoeffizienten</b> $\binom{n}{k} = n \text{ tief } k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\binom{n}{0} = 1$ <b>Symmetrieeigenschaft</b> $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Quadra- tische Gleichung	$ax^2 + bx + c = 0$ <b>Lösungen</b> $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Für $d = \text{Diskriminante} = b^2 - 4ac$ $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \Rightarrow \text{zwei Lösungen} \\ = 0 \Rightarrow \text{eine Lösung} \\ < 0 \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{array} \right.$ <hr/> <b>Satz von Vieta</b> $\boxed{1} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \boxed{2} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
Produkt- ansatz	Es ist die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen. Lässt sich die linke Seite <b>faktorisieren</b> , also als $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = 0$ schreiben, so gilt $f(x) = 0 \Leftrightarrow (f_1(x) = 0 \text{ oder } f_2(x) = 0 \text{ oder } \dots \text{ oder } f_n(x) = 0)$ Die <b>Lösungsmenge</b> von $f(x) = 0$ ist also die <b>Vereinigung</b> der Lösungsmengen der $n$ einfacheren Gleichungen $f_i(x) = 0$ für $i = 1, \dots, n$ .

<p>Potenzgesetze</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>1 <math>a^m \cdot a^n = a^{m+n}</math></p> <p>2 <math>\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}</math></p> <p>3 <math>(a^m)^n = a^{mn}</math></p> <p>4 <math>(ab)^m = a^m b^m</math></p> <p>5 <math>\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}</math></p> </div> <div style="width: 45%; text-align: center;">  </div> </div> <hr/> <p><b>Folgerungen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a^0 = 1</math></li> <li>• <math>a^1 = a</math></li> <li>• <math>a^{-1} = \frac{1}{a}</math></li> <li>• <math>a^{-r} = \frac{1}{a^r}</math></li> <li>• <math>a^{1/2} = \sqrt{a}</math></li> <li>• <math>a^{1/q} = \sqrt[q]{a}</math></li> <li>• <math>a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}</math></li> <li>• <math>a^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}</math></li> </ul> <p><b>Kombinierte Gesetze</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1-2 <math>\frac{a^2 \cdot a^3}{a^5 \cdot a^{-2}} = a^{2+3-5-(-2)} = a^{2+3-5+2} = a^2</math></li> <li>• 3-5 <math>\left(-\frac{2ab^2}{3c^3}\right)^4 = +\frac{2^4 a^4 b^8}{3^4 c^{12}}</math></li> </ul>
<p>Logarithmen-gesetze</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>1 <math>\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)</math></p> <p>2 <math>\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)</math></p> <p>3 <math>\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)</math></p> <p>4 <i>Basiswechsel</i> <math>\log_b(c) = \frac{\log_a(c)}{\log_a(b)}</math></p> </div> <div style="width: 45%; text-align: center;">  </div> </div> <hr/> <p><b>Eigenschaften / Folgerungen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\log_a(b)</math> beantwortet die Frage <math>a^? = b</math></li> <li>• <math>\log_a(1) = 0</math></li> <li>• <math>\log_a(a) = 1</math></li> <li>• <math>\log_a</math> und <math>a^{\text{hoch}}</math> sind gegenseitige Umkehrfunktionen.</li> </ul> <p><math>\Rightarrow \log_a(a^x) = x</math> und <math>\Rightarrow a^{\log_a(x)} = x</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}</math></li> </ul> <hr/> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\ln(x) = \log_e(x)</math> <span style="float: right;"><i>Natürlicher Logarithmus, e = Eulersche Zahl = 2.71828...</i></span></li> <li>• <math>\log(x) = \lg(x) = \log_{10}(x)</math> <span style="float: right;"><i>Zehnerlogarithmus</i></span></li> </ul> <p><b>Kombiniertes Gesetz</b></p> <p>1-3 <math>\log_a\left(\frac{2a^2b}{3c^4}\right) = \log_a(2) + 2 \underbrace{\log_a(a)}_{=1} + \log_a(b) - \log_a(3) - 4 \log_a(c)</math></p>
<p>Arithmetische Zahlenfolge</p>	<p><math>a_{n+1} = a_n + d</math> <span style="float: right;"><i>Rekursive Darstellung</i></span></p> <p><math>a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d</math> <span style="float: right;"><i>Explizite Darstellung</i></span></p> <p><math>a_n = a_m + (n - m) \cdot d</math></p> <p><math>s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot n</math> <span style="float: right;"><i>Summenformel</i></span></p>

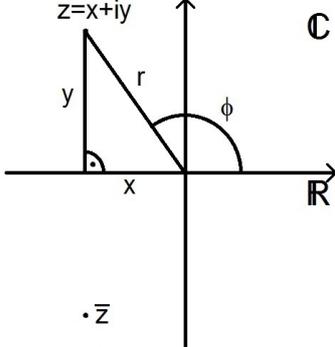
Geometrische Zahlenfolge	$a_{n+1} = a_n \cdot q$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$ $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q} \text{ existiert f\u00fcr } -1 < q < 1$	<i>Rekursive Darstellung</i> <i>Explizite Darstellung</i>  <i>Summenformel</i>  <i>'Unendliche Reihe'</i>									
Summen spezieller Reihen	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{k=m}^n k = \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q(q^n - 1)}{q - 1}$ $\sum_{k=1}^n kq^k = \frac{q(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(q-1)^2}$									
Exponentielles Wachstum/Zerfall	$y = a \cdot q^t \quad \text{und} \quad q = 1 + p \quad \text{bzw.} \quad q = e^r$ <p>Legende <math>y</math> = Endwert; <math>a</math> = Anfangswert;  <math>q</math> = <i>Wachstumsfaktor</i> pro Periode;  <math>t</math> = Zeit in Perioden; <math>p</math> = effektive <i>Zuwachsrate</i> pro Periode.  <math>r</math> = <i>stetige Zuwachsrate</i> pro Periode.</p> <hr/> <p><b>Wachstumsfaktor f\u00fcr <math>z</math> Perioden</b> <math>\Rightarrow q^z</math>  <i>Verdoppelungszeit</i> (<math>q &gt; 1</math>) <math>\Rightarrow T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(q)} \approx \frac{70\%}{p}</math>  <i>Halbwertszeit</i> (<math>q &lt; 1</math>) <math>\Rightarrow T_{1/2} = -\frac{\ln(2)}{\ln(q)} \approx \frac{70\%}{-p}</math></p>										
Lineares Wachstum	$y = a \cdot (1 + p \cdot t)$ <p>Legende <math>y</math> = Endwert; <math>a</math> = Anfangswert; <math>p</math> = <i>Zuwachsrate</i>* pro Periode; <math>t</math> = Zeit in Perioden. *relativ zu Anfangswert <math>a</math>.</p>										
Zinseszins	$q = 1 + p$ $K_n = K_0 \cdot q^n$ $K_0 = \frac{K_n}{q^n}$	<i>Aufzinsfaktor</i> (pro Jahr) $q$ , effektiver Jahreszinssatz $p$ <i>Aufzinsen</i> um $n$ Jahre <i>Abzinsen</i> um $n$ Jahre									
Renten	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">Zahlungsperiode ...</th> <th style="text-align: center;">1 Jahr</th> <th style="text-align: center;"><math>z</math> Jahre</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">Wert auf ersten Rentenzahlungstermin</td> <td style="text-align: center;"><math>W = R \cdot \frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}}</math></td> <td style="text-align: center;"><math>W = R \cdot \frac{1 - q^{-n \cdot z}}{1 - q^{-z}}</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Wert auf letzten Rentenzahlungstermin</td> <td style="text-align: center;"><math>W = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}</math></td> <td style="text-align: center;"><math>W = R \cdot \frac{q^{n \cdot z} - 1}{q^z - 1}</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>Legende <math>R</math> = Rentenrate, <math>q</math> = <i>Aufzinsfaktor</i> (pro Jahr),  <math>n</math> = Anzahl Rentenratezahlungen,  <math>z</math> = Zahlungsperiode (in Jahren), z.B. <math>z = \frac{1}{12}</math> f\u00fcr monatlich.</p>		Zahlungsperiode ...	1 Jahr	$z$ Jahre	Wert auf ersten Rentenzahlungstermin	$W = R \cdot \frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}}$	$W = R \cdot \frac{1 - q^{-n \cdot z}}{1 - q^{-z}}$	Wert auf letzten Rentenzahlungstermin	$W = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$W = R \cdot \frac{q^{n \cdot z} - 1}{q^z - 1}$
Zahlungsperiode ...	1 Jahr	$z$ Jahre									
Wert auf ersten Rentenzahlungstermin	$W = R \cdot \frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}}$	$W = R \cdot \frac{1 - q^{-n \cdot z}}{1 - q^{-z}}$									
Wert auf letzten Rentenzahlungstermin	$W = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$W = R \cdot \frac{q^{n \cdot z} - 1}{q^z - 1}$									

## 2 Trigonometrie

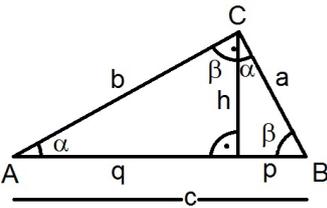
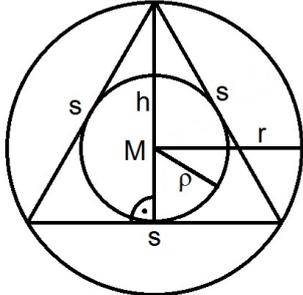
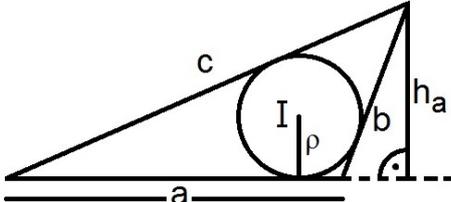
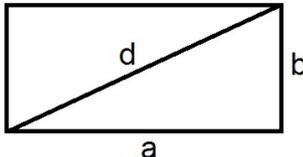
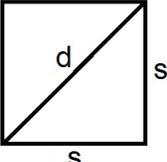
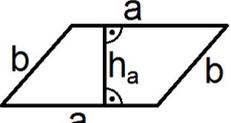
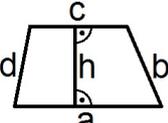
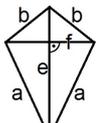
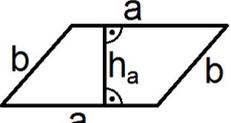
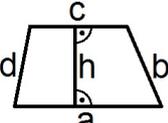
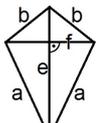
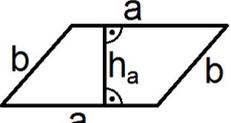
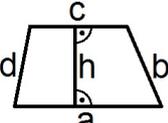
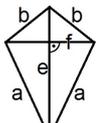
Winkel- mass	<p><i>Gradmass (deg)</i> Voller Winkel = <math>360^\circ</math>  <i>Bogenmass (rad)</i> Voller Winkel = <math>2\pi</math>  <math>\pi = \text{Kreiszahl Pi} = 3.141592653\dots</math></p> $b = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \Leftrightarrow \alpha = b \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ <p>Legende <math>b</math> = Winkel im Bogenmass; <math>\alpha</math> = Winkel im Gradmass</p>																																																		
Trigono- metrische Funk- tionen	<p>1) <b>Definition</b> für <math>0^\circ &lt; \alpha &lt; 90^\circ</math> am '<b>Rechtwinkligen Dreieck</b>'.</p> $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$  <p>2) <b>Definition</b> für beliebiges <math>\alpha</math> am '<i>Einheitskreis</i>'.</p> $\cos(\alpha) = x$ $\sin(\alpha) = y$ $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$ 																																																		
Werte für spezielle Winkel	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tbody> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td><math>0^\circ</math></td> <td><math>\pm 30^\circ</math></td> <td><math>\pm 45^\circ</math></td> <td><math>\pm 60^\circ</math></td> <td><math>\pm 90^\circ</math></td> <td><math>\pm 120^\circ</math></td> <td><math>\pm 135^\circ</math></td> <td><math>\pm 150^\circ</math></td> <td><math>180^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>b</math></td> <td>0</td> <td><math>\pm \frac{\pi}{6}</math></td> <td><math>\pm \frac{\pi}{4}</math></td> <td><math>\pm \frac{\pi}{3}</math></td> <td><math>\pm \frac{\pi}{2}</math></td> <td><math>\pm \frac{2\pi}{3}</math></td> <td><math>\pm \frac{3\pi}{4}</math></td> <td><math>\pm \frac{5\pi}{6}</math></td> <td><math>\pi</math></td> </tr> <tr> <td>sin</td> <td>0</td> <td><math>\pm \frac{1}{2}</math></td> <td><math>\pm \frac{\sqrt{2}}{2}</math></td> <td><math>\pm \frac{\sqrt{3}}{2}</math></td> <td><math>\pm 1</math></td> <td><math>\pm \frac{\sqrt{3}}{2}</math></td> <td><math>\pm \frac{\sqrt{2}}{2}</math></td> <td><math>\pm \frac{1}{2}</math></td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>cos</td> <td>1</td> <td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td> <td><math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td>0</td> <td><math>-\frac{1}{2}</math></td> <td><math>-\frac{\sqrt{2}}{2}</math></td> <td><math>-\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td> <td>-1</td> </tr> <tr> <td>tan</td> <td>0</td> <td><math>\pm \frac{\sqrt{3}}{3}</math></td> <td><math>\pm 1</math></td> <td><math>\pm \sqrt{3}</math></td> <td>n.d.</td> <td><math>\mp \sqrt{3}</math></td> <td><math>\mp 1</math></td> <td><math>\mp \frac{\sqrt{3}}{3}</math></td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	$\alpha$	$0^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 90^\circ$	$\pm 120^\circ$	$\pm 135^\circ$	$\pm 150^\circ$	$180^\circ$	$b$	0	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{2\pi}{3}$	$\pm \frac{3\pi}{4}$	$\pm \frac{5\pi}{6}$	$\pi$	sin	0	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm 1$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	0	cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	tan	0	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\pm 1$	$\pm \sqrt{3}$	n.d.	$\mp \sqrt{3}$	$\mp 1$	$\mp \frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\alpha$	$0^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 90^\circ$	$\pm 120^\circ$	$\pm 135^\circ$	$\pm 150^\circ$	$180^\circ$																																										
$b$	0	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{2\pi}{3}$	$\pm \frac{3\pi}{4}$	$\pm \frac{5\pi}{6}$	$\pi$																																										
sin	0	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm 1$	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	0																																										
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1																																										
tan	0	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\pm 1$	$\pm \sqrt{3}$	n.d.	$\mp \sqrt{3}$	$\mp 1$	$\mp \frac{\sqrt{3}}{3}$	0																																										
Trigono- metrische Identi- täten	$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \qquad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ <hr/> <p><b>Symmetrie</b> (<math>\frac{\pi}{2}[\text{rad}] = 90^\circ[\text{deg}]</math> ; <math>\pi[\text{rad}] = 180^\circ[\text{deg}]</math>):</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\tan(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \frac{1}{\tan(\alpha)}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\tan(\pi \pm \alpha) = \pm \tan(\alpha)</math></td> </tr> </table> <p><b>Periodizität</b> (<math>\pi[\text{rad}] = 180^\circ[\text{deg}]</math> ; <math>2\pi[\text{rad}] = 360^\circ[\text{deg}]</math>):</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)</math></td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)</math></td> </tr> </table> <hr/> <p><b>Summen, Differenzen, doppelte und halbe Winkel</b></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\alpha)\sin(\beta)</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}</math></td> </tr> </table>	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$	$\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$	$\tan(\pi \pm \alpha) = \pm \tan(\alpha)$	$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$	$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$	$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$	$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$																													
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$																																																	
$\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp \frac{1}{\tan(\alpha)}$																																																	
$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$	$\tan(\pi \pm \alpha) = \pm \tan(\alpha)$																																																	
$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$																																																	
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$	$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$																																																	
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$																																																	
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$	$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$																																																	

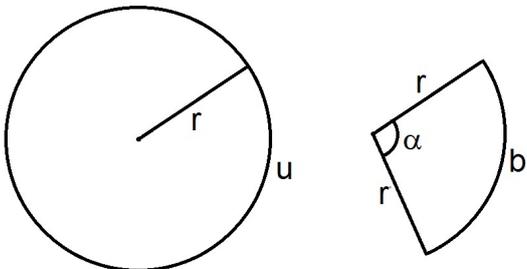
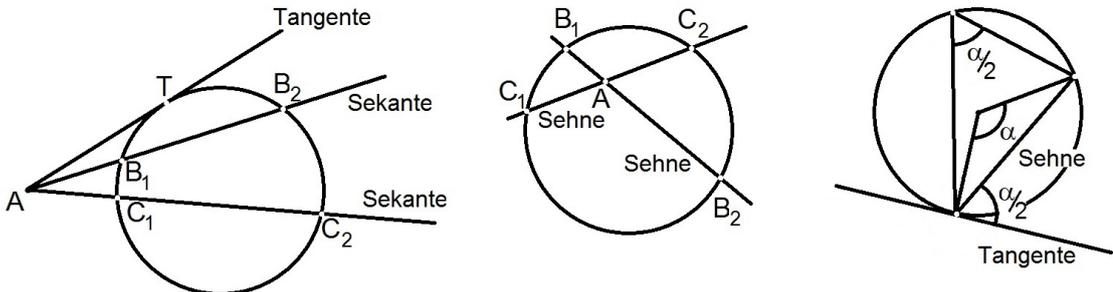
Allgemeines Ebenes Dreieck	<p>1) <i>Winkelsumme</i> <math>\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ</math></p> <p>2) <i>Sinussatz</i> <math>\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}</math> und (*). bzw. <math>\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}</math> und (*).</p> <p>3) <i>Cosinussatz</i> <math>c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)</math> und (*).</p> <p>4) <i>Umkreisradius</i> <math>r = \frac{a}{2 \sin(\alpha)}</math> und (*).</p> <p>5) <i>Fläche</i> <math>A = \frac{ab \sin(\gamma)}{2}</math> und (*).</p> <p>(*) = 'zyklisch vertauscht'</p>	
----------------------------------	--	--

### 3 Komplexe Zahlen

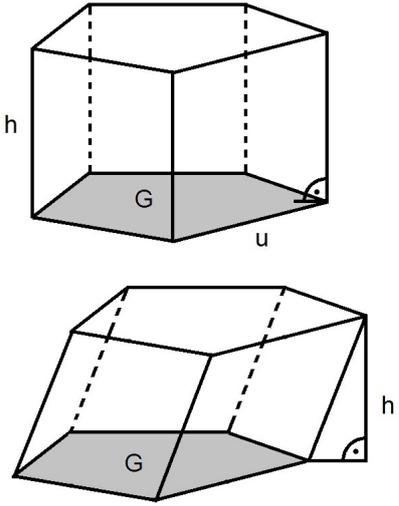
Definition und Darstel- lungen	<p>Die <i>imaginäre Einheit</i> <math>i</math> erfüllt die Gleichung <math>i^2 = -1</math></p> <p><i>Karthesische Form</i> <math>z = x + iy</math></p> <p><i>Polarform</i> <math>z = r(\cos \phi + i \sin \phi)</math> dafür schreibt man auch kurz <math>z = r \operatorname{cis} \phi</math></p> <p><i>Eulersche Relation</i> <math>z = r e^{i\phi}</math> <math>\phi</math> im Bogenmass!</p> <p><i>Konjugiert komplexe Zahl</i> <math>\bar{z} = x - iy = r(\cos \phi - i \sin \phi) = r \operatorname{cis}(-\phi) = r e^{-i\phi}</math></p>	
Rechen- opera- tionen	<p><b>Addition</b> <math>z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)</math></p> <p><b>Subtraktion</b> <math>z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)</math></p> <p><b>Multiplikation</b> <math>z_1 \cdot z_2 = r_1 \operatorname{cis} \phi_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} \phi_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\phi_1 + \phi_2)</math></p> <p><b>Division</b> <math>\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis} \phi_1}{r_2 \operatorname{cis} \phi_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\phi_1 - \phi_2)</math></p> <p><b>Potenz</b> <math>z^n = (r_1 \operatorname{cis} \phi)^n = r_1^n \operatorname{cis}(n\phi)</math></p> <p><b>Wurzel</b> <math>\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \operatorname{cis} \phi} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right)</math>, für <math>k = 0, \dots, n-1</math></p> <p>Im <b>Gradmass</b> natürlich analog ...</p> <p><b>Wurzel</b> <math>\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \operatorname{cis} \phi} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\phi + 360^\circ k}{n}\right)</math>, für <math>k = 0, \dots, n-1</math></p> <p><i>Fundamentalsatz der Algebra</i>: Jede Polynomgleichung <math>n</math>-ten Grades <math>a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0</math> (<math>a_n \neq 0</math>) hat in <math>\mathbb{C}</math> genau <math>n</math> Lösungen.</p>	

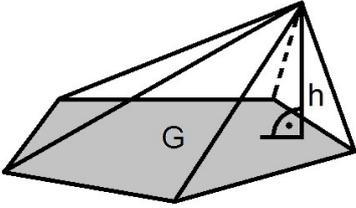
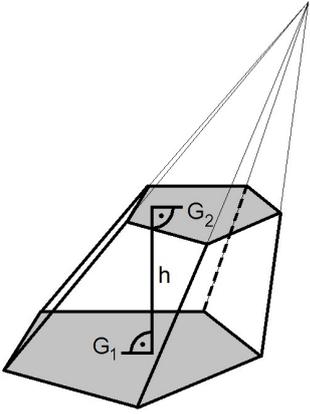
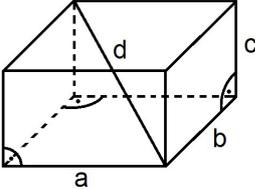
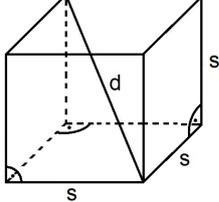
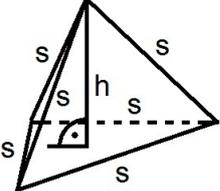
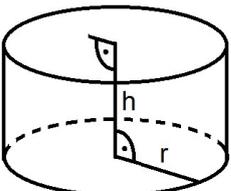
### 4 Planimetrie

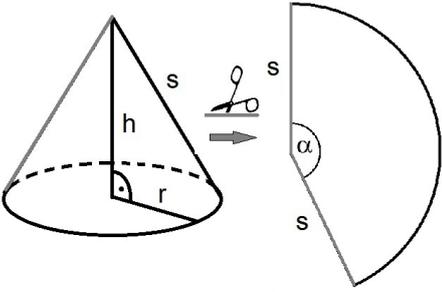
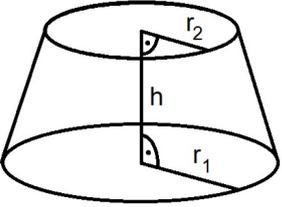
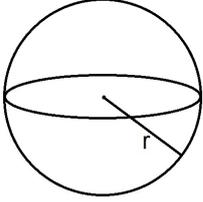
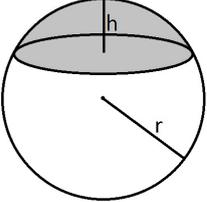
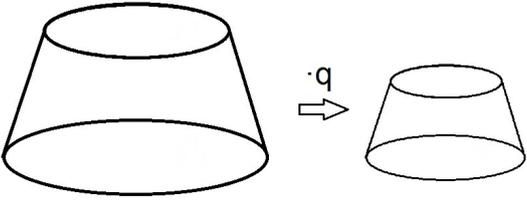
<p>Dreieck rechtwinklig</p>	<p><i>Pythagoras</i> <math>a^2 + b^2 = c^2</math></p> <p><i>Höhensatz</i> <math>h^2 = pq</math></p> <p><i>Kathetensatz</i> <math>a^2 = pc</math> und <math>b^2 = qc</math></p> <p><i>Flächensatz</i> <math>ab = hc</math></p>																							
<p>Dreieck gleichseitig</p>	<p><b>Umfang</b> <math>u = 3s</math></p> <p><b>Höhe</b> <math>h = \frac{s\sqrt{3}}{2}</math></p> <p><b>Fläche</b> <math>A = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}</math></p> <p><b>Umkreisradius</b> <math>r = \frac{s\sqrt{3}}{3}</math></p> <p><b>Inkreisradius</b> <math>\rho = \frac{s\sqrt{3}}{6}</math></p>																							
<p>Dreieck allgemein</p>	<p><b>Umfang</b> <math>u = a + b + c</math></p> <p><b>Fläche</b> <math>A = \frac{a \cdot h_a}{2}</math></p> <p>Die <i>Formel von Heron</i></p> <p>Fläche <math>A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}</math>, mit <math>s = \frac{u}{2}</math></p> <p><b>Inkreisradius</b> <math>\rho = \frac{A}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}</math></p>																							
<p>Rechteck</p>	<p><b>Umfang</b> <math>u = 2a + 2b</math></p> <p><b>Fläche</b> <math>A = ab</math></p> <p><b>Diagonale</b> <math>d = \sqrt{a^2 + b^2}</math></p>																							
<p>Quadrat</p>	<p><b>Umfang</b> <math>u = 4s</math></p> <p><b>Fläche</b> <math>A = s^2</math></p> <p><b>Diagonale</b> <math>d = s\sqrt{2}</math></p>																							
<p>Weitere Vierecke</p>	<table border="0"> <thead> <tr> <th data-bbox="272 1570 448 1603">Name</th> <th data-bbox="448 1570 735 1603"><i>Parallelogramm</i></th> <th data-bbox="735 1570 1023 1603"><i>Trapez</i></th> <th data-bbox="1023 1570 1310 1603"><i>Drachen</i></th> <th data-bbox="1310 1570 1485 1603"><i>Rhombus</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="272 1603 448 1749"></td> <td data-bbox="448 1603 735 1749">  </td> <td data-bbox="735 1603 1023 1749">  </td> <td data-bbox="1023 1603 1310 1749">  </td> <td data-bbox="1310 1603 1485 1749">  </td> </tr> <tr> <td data-bbox="272 1783 448 1816"><b>Umfang</b></td> <td data-bbox="448 1783 735 1816"><math>u = 2a + 2b</math></td> <td data-bbox="735 1783 1023 1816"><math>u = a + b + c + d</math></td> <td data-bbox="1023 1783 1310 1816"><math>u = 2a + 2b</math></td> <td data-bbox="1310 1783 1485 1816"><math>u = 2a + 2b</math></td> </tr> <tr> <td data-bbox="272 1850 448 1883"><b>Fläche</b></td> <td data-bbox="448 1850 735 1883"><math>A = a \cdot h_a</math></td> <td data-bbox="735 1850 1023 1883"><math>A = \frac{a+c}{2} \cdot h</math></td> <td data-bbox="1023 1850 1310 1883"><math>A = \frac{e \cdot f}{2}</math></td> <td data-bbox="1310 1850 1485 1883"><math>A = \frac{e \cdot f}{2}</math></td> </tr> </tbody> </table>				Name	<i>Parallelogramm</i>	<i>Trapez</i>	<i>Drachen</i>	<i>Rhombus</i>						<b>Umfang</b>	$u = 2a + 2b$	$u = a + b + c + d$	$u = 2a + 2b$	$u = 2a + 2b$	<b>Fläche</b>	$A = a \cdot h_a$	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	$A = \frac{e \cdot f}{2}$	$A = \frac{e \cdot f}{2}$
Name	<i>Parallelogramm</i>	<i>Trapez</i>	<i>Drachen</i>	<i>Rhombus</i>																				
																								
<b>Umfang</b>	$u = 2a + 2b$	$u = a + b + c + d$	$u = 2a + 2b$	$u = 2a + 2b$																				
<b>Fläche</b>	$A = a \cdot h_a$	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$	$A = \frac{e \cdot f}{2}$	$A = \frac{e \cdot f}{2}$																				

Kreis 1	<p><b>Umfang</b> <math>u = 2\pi r</math></p> <p><b>Fläche</b> <math>A = \pi r^2</math></p> <p>Sektorfläche <math>A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}</math></p> <p>Bogenlänge <math>b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}</math></p> <p><b>Maximal-/Minimaleigenschaft</b></p> <p>Der Kreis ist die Figur, die bei vorgegebenem Umfang maximale Fläche hat.</p> <p>Der Kreis ist die Figur, die bei vorgegebener Fläche minimalen Umfang hat.</p> 
Kreis 2	<p><b>Sekantensatz</b> <math>\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2} = (\overline{AT})^2</math></p> <p><b>Sehnensatz</b> <math>\overline{AB_1} \cdot \overline{AB_2} = \overline{AC_1} \cdot \overline{AC_2}</math></p> <p><b>Peripheriewinkelsatz</b> <math>\Rightarrow</math> Peripheriewinkel = Sehnentangentenwinkel = <math>\frac{\text{Zentriwinkel}}{2}</math></p>  <p style="text-align: center;"> <span style="margin-right: 150px;">Sekantensatz</span> <span style="margin-right: 150px;">Sehnensatz</span> <span>Peripheriewinkelsatz</span> </p>

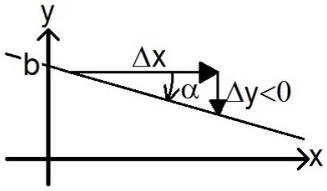
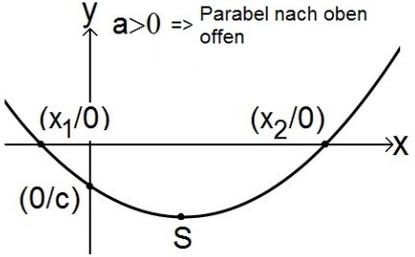
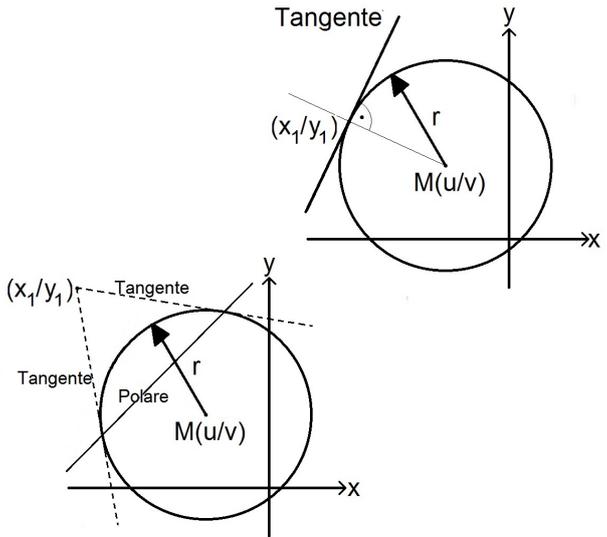
## 5 Stereometrie

Prisma	<p><i>Die Formeln gelten auch für schiefe Prismen!</i></p> <p><b>Volumen</b> <math>V = G \cdot h</math></p> <p>Legende: <math>G</math> = Flächeninhalt Grundfläche;  <math>h</math> = Körperhöhe.</p> <p><b>Mantelfläche</b> <math>M</math> zusammensetzen aus Parallelogrammen.</p> <p>Für gerade Prismen gilt: <math>M = u \cdot h</math></p> <p>Legende <math>u</math> = Umfang Grundfläche;  <math>h</math> = Körperhöhe.</p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = 2G + M</math></p> <p>Legende: <math>G</math> = Flächeninhalt Grundfläche;  <math>M</math> = Mantelfläche.</p> 
--------	--

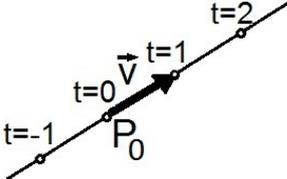
Pyramide	<p>Die Formeln gelten auch für schiefe Pyramiden!</p> <p><b>Volumen</b> <math>V = \frac{G \cdot h}{3}</math>          Legende <math>G =</math> Grundfläche;  <math>h =</math> Körperhöhe.</p> <p><b>Mantelfläche</b> <math>M</math> zusammensetzen aus Dreiecken!</p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = G + M</math>          Legende <math>G =</math> Grundfläche;  <math>M =</math> Mantelfläche.</p>	
Pyramidenstumpf	<p>Die Formeln gelten auch für schiefe Pyramidenstümpfe!</p> <p><b>Volumen</b> <math>V = \frac{h}{3} \cdot (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)</math>          Legende <math>G_1 =</math> Grundfläche; <math>G_2 =</math> Deckfläche;  <math>h =</math> Körperhöhe.</p> <p><b>Mantelfläche</b> <math>M</math> zusammensetzen aus Trapezen!</p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = G_1 + G_2 + M</math>          Legende <math>G_1 =</math> Grundfläche; <math>G_2 =</math> Deckfläche;  <math>M =</math> Mantelfläche.</p>	
Quader	<p><b>Volumen</b> <math>V = abc</math></p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = 2ab + 2ac + 2bc</math></p> <p><b>Raumdiagonale</b> <math>d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}</math></p>	
Würfel	<p><b>Volumen</b> <math>V = s^3</math></p> <p><b>Oberfläche</b> <math>M = 6s^2</math></p> <p><b>Raumdiagonale</b> <math>d = s\sqrt{3}</math></p>	
Tetraeder	<p><b>Körperhöhe</b> <math>h = s \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}</math></p> <p><b>Volumen</b> <math>V = \frac{s^3 \cdot \sqrt{2}}{12}</math></p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = s^2 \cdot \sqrt{3}</math></p>	
Gerader Kreiszylinder	<p><b>Volumen</b> <math>V = r^2 \pi h</math></p> <p><b>Mantelfläche</b> <math>M = 2\pi r h</math></p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = 2\pi r(r + h)</math></p>	

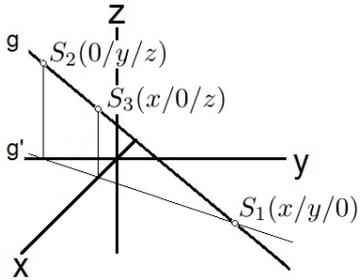
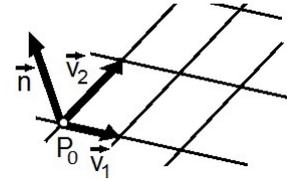
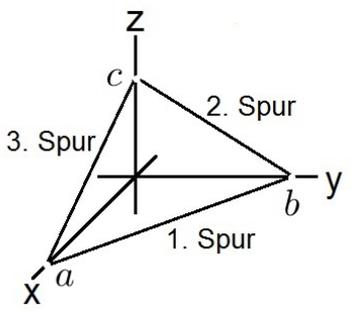
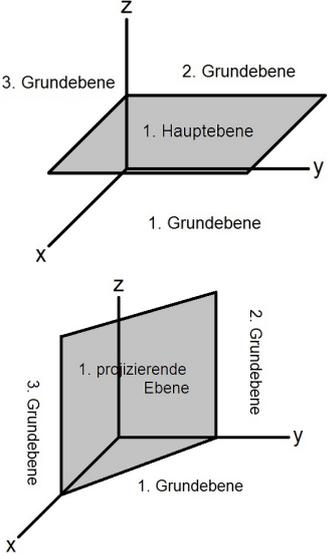
Gerader Kreiskegel	<p><b>Volumen</b> <math>V = \frac{r^2 \pi h}{3}</math></p> <p><b>Seitenlinie</b> <math>s = \sqrt{r^2 + h^2}</math></p> <p><b>Mantelfläche</b> <math>M = \pi r s</math></p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = \pi r (r + s)</math></p> <p><b>Sektorwinkel</b> <math>\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{s}</math></p>	
Gerader Kreiskegel- stumpf	<p><b>Volumen</b> <math>V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)</math></p> <p><b>Seitenlinie</b> <math>s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}</math></p> <p><b>Mantelfläche</b> <math>M = \pi s (r_1 + r_2)</math></p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = \pi \cdot (r_1^2 + (r_1 + r_2)s + r_2^2)</math></p>	
Kugel	<p><b>Volumen</b> <math>V = \frac{4\pi r^3}{3}</math></p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = 4\pi r^2</math></p> <p><b>Maximal-/Minimaleingeschaft</b>            Die Kugel ist der Körper mit grösstem Volumen bei gegebener Oberfläche.            Die Kugel ist der Körper mit kleinster Oberfläche bei gegebenem Volumen.</p>	
Kugel- segment	<p><b>Volumen</b> <math>V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3}</math></p> <p><b>Mantelfläche</b> <math>M = 2\pi r h</math></p> <p><b>Oberfläche</b> <math>O = \pi h (4r - h)</math></p>	
Streckungen	<p>Wird ein Körper mit dem Faktor <math>q</math> gestreckt/gestaucht, dann ändern sich</p> <p><b>Längen</b> mit Faktor <math>q</math></p> <p><b>Flächen</b> mit Faktor <math>q^2</math></p> <p><b>Volumen</b> mit Faktor <math>q^3</math></p>	

## 6 Analytische Geometrie der Ebene

<p>Gerade</p>	<p>Hauptform <math>y = mx + b</math></p> <p>Legende <math>m = \text{Steigung}</math>; <math>b = y\text{-Achsenabschnitt}</math></p> <p>Steigung <math>m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Differenzenquotient}</math></p> <p>Punkt-Steigungsform <math>y = m(x - x_1) + y_1</math></p> <p>Legende <math>m = \text{Steigung}</math>; <math>(x_1/y_1) = \text{Punkt auf der Gerade}</math></p> <p>Steigungswinkel = Winkel gegen positive x-Achse = <math>\alpha = \arctan(m)</math></p> <p>Zwei Geraden sind <i>parallel</i> <math>\Leftrightarrow m_1 = m_2</math></p> <p>Zwei Geraden sind <i>senkrecht</i> <math>\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1</math></p> <p>Winkel zwischen zwei Geraden</p> <p><math>\Rightarrow \min(\alpha, 180^\circ - \alpha)</math>, mit <math>\alpha =  \arctan(m_2) - \arctan(m_1) </math></p> <hr/> <p>Normalform <math>ax + by + c = 0</math></p> <p>Legende <math>\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \text{Normalenvektor} = \text{Vektor senkrecht zur Geraden}</math></p>	
<p>Parabel</p>	<p>Hauptform <math>y = ax^2 + bx + c</math></p> <p>Legende <math>a = \text{Öffnungsparameter}</math>; <math>c = y\text{-Achsenabschnitt}</math></p> <p>Nullstellen <math>x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}</math></p> <p>Scheitelpunkt <math>S(-\frac{b}{2a} / c - \frac{b^2}{4a})</math></p> <p>Scheitelform <math>y = a(x - x_s)^2 + y_s</math></p> <p>Legende <math>a = \text{Öffnungsparameter}</math>; <math>(x_s/y_s) = \text{Scheitel der Parabel}</math></p> <p>Nullstellenform <math>y = a(x - x_1)(x - x_2)</math></p> <p>Legende <math>a = \text{Öffnungsparameter}</math>; <math>x_1, x_2 = \text{Nullstellen}</math></p>	
<p>Kreis</p>	<p>Hauptform <math>x^2 + y^2 + ax + by + c = 0</math></p> <p>Mittelpunkt <math>M(-\frac{a}{2} / -\frac{b}{2})</math></p> <p>Radius <math>r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}</math></p> <p>Mittelpunktsform <math>(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2</math></p> <p>Legende <math>(u/v) = \text{Mittelpunkt}</math>; <math>r = \text{Radius}</math></p> <p>Tangente im Kreispunkt <math>(x_1/y_1)</math></p> <p><math>\Rightarrow (x_1 - u)(x - u) + (y_1 - v)(y - v) = r^2</math></p> <p>Legende <math>(u/v) = \text{Mittelpunkt}</math>; <math>r = \text{Radius}</math></p> <p>'Polare' zum Punkt <math>(x_1/y_1)</math></p> <p><math>\Rightarrow (x_1 - u)(x - u) + (y_1 - v)(y - v) = r^2</math></p> <p>Legende <math>(u/v) = \text{Mittelpunkt}</math>; <math>r = \text{Radius}</math></p>	

## 7 Vektorgeometrie (im Raum)

<p>Grundbegriffe</p>	<p>Ortsvektor von Punkt <math>A(x/y/z) \Rightarrow \vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}</math>  Vektor von <math>A</math> nach <math>B \Rightarrow \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}</math></p> <p><b>Neuer Punkt</b> = Startpunkt + Vektorkombination</p> <p>Betrag eines Vektors = Länge des Vektors <math>\Rightarrow  \vec{v}  = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}</math></p> <p>Skalarprodukt zweier Vektoren <math>\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3</math></p> <p>Es gilt <math>\vec{v} \cdot \vec{w} =  \vec{v}  \cdot  \vec{w}  \cdot \cos \alpha</math>; <math>\alpha</math> = Zwischenwinkel.</p> <p>Es gilt <math>\vec{v} \cdot \vec{v} =  \vec{v} ^2</math></p> <p>Es gilt <math>\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}</math></p> <p>Vektorprodukt zweier Vektoren <math>\Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}</math></p> <p>Es gilt <math>\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow v \parallel w</math></p> <p>Es gilt <math>\vec{v} \times \vec{w}</math> steht senkrecht auf <math>\vec{v}</math> und senkrecht auf <math>\vec{w}</math></p> <p>Es gilt <math> \vec{v} \times \vec{w} </math>  = Fläche des von <math>\vec{v}</math> und <math>\vec{w}</math> aufgespannten Parallelogrammes  = <math> \vec{v}  \cdot  \vec{w}  \cdot \sin \alpha</math>; <math>\alpha</math> = Zwischenwinkel</p> <p>Winkel zwischen zwei Vektoren <math>\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{ \vec{v}  \cdot  \vec{w} }</math></p> <p>Winkelhalbierender Vektor zweier Vektoren <math>\Rightarrow \frac{\vec{v}}{ \vec{v} } + \frac{\vec{w}}{ \vec{w} }</math></p> <p>Vektor der Länge <math>\ell \Rightarrow \frac{\ell}{ \vec{v} } \cdot \vec{v}</math></p> <p>Fläche des Dreiecks aufgespannt durch zwei Vektoren <math>\Rightarrow \frac{ \vec{v} \times \vec{w} }{2}</math></p> <p>Mittelpunkt einer Strecke <math>\vec{AB} \Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}</math></p> <p>Teilpunkt Verhältnis <math>a : b</math> einer Strecke <math>\vec{AB} \Rightarrow \vec{T} = \frac{b \cdot \vec{A} + a \cdot \vec{B}}{a + b}</math></p> <p>Schwerpunkt eines Dreiecks <math>ABC \Rightarrow \vec{S} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}</math></p> <hr/> <p>Länge der Komponente eines Vektors <math>\vec{v}</math></p> <p>1 parallel zur Richtung <math>\vec{b} \Rightarrow \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} }</math>      2 senkrecht zur Richtung <math>\vec{b} \Rightarrow \frac{ \vec{v} \times \vec{b} }{ \vec{b} }</math></p>
<p>Gerade</p>	<p>Parameterform <math>\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P}_0 + t \cdot \vec{v}</math></p> <p>Legende <math>\vec{P}_0</math> = Ortsvektor des Fusspunktes <math>P_0</math>;  <math>t \in \mathbb{R}</math> Parameter; <math>\vec{v}</math> = Richtungsvektor</p> 

Spurpunkte	<p>Die <b>Spurpunkte</b> einer Geraden sind ihre Schnittpunkte mit den 3 Koordinatenebenen <math>xy</math>-Ebene (<math>z = 0</math>), <math>yz</math>-Ebene (<math>x = 0</math>) und <math>xz</math>-Ebene (<math>y = 0</math>):</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Spurpunkt <math>S_1(x/y/0)</math>,</li> <li>2. Spurpunkt <math>S_2(0/y/z)</math>,</li> <li>3. Spurpunkt <math>S_3(x/0/z)</math>.</li> </ol>	
Ebene	<p>Parameterform <math>\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P}_0 + t_1 \cdot \vec{v}_1 + t_2 \cdot \vec{v}_2</math></p> <p>Legende <math>\vec{P}_0</math> = Ortsvektor des Fusspunktes <math>P_0</math>; <math>t, s \in \mathbb{R}</math> Parameter;  <math>\vec{v}_1, \vec{v}_2</math> = Richtungsvektoren.</p> <p>Koordinatenform <math>Ax + By + Cz + D = 0</math></p> <p>Legende <math>\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}</math> = Normalenvektor.</p> <p><b>Übergang</b> Parameterform zu Koordinatenform</p> <p>1 <math>\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2</math>, 2 <math>D</math> findet man durch Einsetzen von Fusspunkt <math>P_0</math>.</p> <hr/> <p>Hessesche Normalform <math>\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0</math></p> <p>Legende <math>\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}</math> = Normalenvektor.</p> <p>Abschnittsform <math>\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1</math></p> <p>Legende <math>a</math> = x-Achsenabschnitt;  <math>b</math> = y-Achsenabschnitt;  <math>c</math> = z-Achsenabschnitt.</p>	 
Spezielle Lagen von Ebenen	<p><b>Koordinatenebenen = Grundebenen</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Grundebene = <math>xy</math>-Ebene <math>\Rightarrow z = 0</math></li> <li>2. Grundebene = <math>yz</math>-Ebene <math>\Rightarrow x = 0</math></li> <li>3. Grundebene = <math>xz</math>-Ebene <math>\Rightarrow y = 0</math></li> </ol> <p><b>Hauptebenen</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Hauptebene <math>\parallel xy</math>-Ebene <math>\Rightarrow z + D = 0</math></li> <li>2. Hauptebene <math>\parallel yz</math>-Ebene <math>\Rightarrow x + D = 0</math></li> <li>3. Hauptebene <math>\parallel xz</math>-Ebene <math>\Rightarrow y + D = 0</math></li> </ol> <p><b>Projizierende Ebenen</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Projizierende Ebene <math>\perp xy</math>-Ebene <math>\parallel z</math>-Achse <math>\Rightarrow Ax + By + D = 0</math></li> <li>2. Projizierende Ebene <math>\perp yz</math>-Ebene <math>\parallel x</math>-Achse <math>\Rightarrow By + Cz + D = 0</math></li> <li>3. Projizierende Ebene <math>\perp xz</math>-Ebene <math>\parallel y</math>-Achse <math>\Rightarrow Ax + Cz + D = 0</math></li> </ol>	
Bezeichnungen für die folgenden Abschnitte	<p>Punkte <math>Q</math> bzw. <math>Q_1</math> und <math>Q_2</math></p> <p>Geraden <math>g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P} + t \cdot \vec{v}</math> bzw. <math>g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P}_1 + t \cdot \vec{v}_1</math> und <math>g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P}_2 + t \cdot \vec{v}_2</math></p> <p>Ebenen <math>E: Ax + By + Cz + D = 0</math>, Normalenvektor <math>\vec{n}</math> bzw.  <math>E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0</math>, Normalenvektor <math>\vec{n}_1</math> und  <math>E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0</math>, Normalenvektor <math>\vec{n}_2</math></p>	

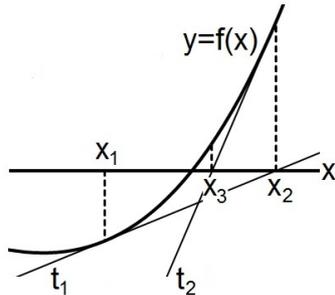
Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen im Raum	<p><b>Zwei Geraden</b> <math>g_1</math> und <math>g_2</math> sind <span style="float: right;"><i>Bezeichnungen siehe Seite 12 unten.</i></span></p> <p>(1) <i>zusammenfallend</i>, falls ihre R'Vektoren parallel sind und <math>P_2</math> auf <math>g_1</math> liegt.  (2) <i>echt parallel</i>, falls ihre R'Vektoren parallel sind und <math>P_2</math> nicht auf <math>g_1</math> liegt.  (3) <i>schneidend</i>, falls ihre R'Vektoren nicht parallel sind und <math>g_1</math> und <math>g_2</math> einen S'Punkt haben.  (4) <i>windschief</i>, falls ihre R'Vektoren nicht parallel sind und <math>g_1</math> und <math>g_2</math> keinen S'punkt haben.</p> <hr/> <p><b>Zwei Ebenen</b> <math>E_1</math> und <math>E_2</math> sind</p> <p>(1) <i>zusammenfallend</i>, falls ihre Koordinatengleichungen sich nur um einen Faktor unterscheiden.  (2) <i>echt parallel</i>, falls ihre N'Vektoren parallel sind und nicht (1) gilt.  (3) <i>schneidend</i>, falls ihre N'Vektoren nicht parallel sind.</p> <hr/> <p><b>Eine Gerade <math>g</math> und eine Ebene <math>E</math> sind</b></p> <p>(1) <math>g</math> liegt in <math>E</math>, falls R'Vektor(<math>g</math>) und N'Vektor(<math>E</math>) senkrecht stehen und <math>P</math> auf <math>E</math> liegt.  (2) <i>echt parallel</i>, falls R'Vektor(<math>g</math>) und N'Vektor(<math>E</math>) senkrecht stehen und nicht (1) gilt.  (3) <i>schneidend</i>, falls R'Vektor(<math>g</math>) und N'Vektor(<math>E</math>) nicht senkrecht stehen.</p>
Aufstellen von Geraden- und Ebenengleichungen	<p style="text-align: right;"><i>Bezeichnungen siehe Seite 12 unten.</i></p> <p>Gesucht <b>Gerade</b> <math>h</math> mit <math>h \parallel g</math> <span style="float: right;"><math>\Rightarrow</math> R'Vektor(<math>h</math>) = <math>\vec{v}</math></span>  Gesucht <b>Gerade</b> <math>h</math> mit <math>h \perp E</math> <span style="float: right;"><math>\Rightarrow</math> R'Vektor(<math>h</math>) = <math>\vec{n}</math></span>  Gesucht <b>Gerade</b> <math>h</math> mit <math>h \parallel E_1</math> und <math>h \parallel E_2</math> <span style="float: right;"><math>\Rightarrow</math> R'Vektor(<math>h</math>) = <math>\vec{n}_1 \times \vec{n}_2</math></span></p> <hr/> <p>Gesucht <b>Ebene</b> <math>F</math> mit <math>F \parallel E</math> <span style="float: right;"><math>\Rightarrow</math> N'Vektor(<math>F</math>) = <math>\vec{n}</math></span>  Gesucht <b>Ebene</b> <math>F</math> mit <math>F \perp g</math> <span style="float: right;"><math>\Rightarrow</math> N'Vektor(<math>F</math>) = <math>\vec{v}</math></span>  Gesucht <b>Ebene</b> <math>F</math> mit <math>F \parallel g_1</math> und <math>F \parallel g_2</math>  , falls <math>g_1 \nparallel g_2</math> <span style="float: right;"><math>\Rightarrow</math> N'Vektor(<math>F</math>) = <math>\vec{v}_1 \times \vec{v}_2</math></span>  , falls <math>g_1 \parallel g_2</math> <span style="float: right;"><math>\Rightarrow</math> N'Vektor(<math>F</math>) = <math>\vec{P}_1 \vec{P}_2 \times \vec{v}_1</math></span></p> <p>Gesucht <b>Ebene</b> <math>F</math> mit <math>F \perp E</math> und <math>F \parallel g</math> <span style="float: right;"><math>\Rightarrow</math> N'Vektor(<math>F</math>) = <math>\vec{n} \times \vec{v}</math></span></p>
Schnittprobleme	<p><b>Punkt-Gerade</b> Punkt als <math>(x/y/z)</math> einsetzen in Geradengleichung.  <b>Punkt-Ebene</b> Punkt als <math>(x/y/z)</math> einsetzen in Ebenengleichung.  <b>Gerade-Gerade</b> Zeilenweises Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen  Lineares Gleichungssystem 3 Gleichungen mit 2 Unbestimmten <math>t_1, t_2</math>.  <b>Gerade-Ebene</b> Zeilenweises Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung.  <b>Ebene-Ebene</b> Lineares Gleichungssystem 2 Gleichungen mit 3 Unbestimmten <math>x, y, z</math>.  <b>3 Ebenen</b> Lineares Gleichungssystem 3 Gleichungen mit 3 Unbestimmten <math>x, y, z</math>.</p>
Abstandsprobleme	<p style="text-align: right;"><i>Bezeichnungen siehe Seite 12 unten.</i></p> <p><b>Punkt-Punkt</b> Abstand = <math> \overrightarrow{Q_1 Q_2} </math>  <b>Punkt-Gerade</b> Abstand = <math>\frac{ \vec{v} \times \overrightarrow{PQ} }{ \vec{v} }</math>  <b>Punkt-Ebene</b> Abstand = <math>\frac{ Ax + By + Cz + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Big _{(x/y/z)=Q}</math>  <b>Gerade-Gerade</b> Abstand = <math>\begin{cases} \frac{ (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} }{ \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 } &amp; , \text{ falls } \vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2 \\ \frac{ \vec{v}_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2} }{ \vec{v}_1 } &amp; , \text{ falls } \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \end{cases}</math>  <b>Gerade-Ebene</b> Abstand = <math>\begin{cases} \frac{ Ax + By + Cz + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Big _{(x/y/z)=P} &amp; , \text{ falls } \vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0 \\ 0 &amp; , \text{ falls } \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}</math>  <b>Ebene-Ebene</b> Abstand = <math>\begin{cases} \frac{ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 }{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \Big _{(x/y/z)=R_2^*} &amp; , \text{ falls } \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \\ 0 &amp; , \text{ falls } \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \end{cases}</math>  , wobei <math>R_2^*</math> ein beliebiger Punkt von Ebene 2 ist.</p>
Winkelprobleme	<p style="text-align: right;"><i>Bezeichnungen siehe Seite 12 unten.</i></p> <p><b>Gerade-Gerade</b> Winkel = <math>\arccos \left( \frac{ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 }{ \vec{v}_1  \cdot  \vec{v}_2 } \right)</math>  <b>Gerade-Ebene</b> Winkel = <math>\arcsin \left( \frac{ \vec{v} \cdot \vec{n} }{ \vec{v}  \cdot  \vec{n} } \right)</math>  <b>Ebene-Ebene</b> Winkel = <math>\arccos \left( \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1  \cdot  \vec{n}_2 } \right)</math></p>

## 8 Grenzwerte

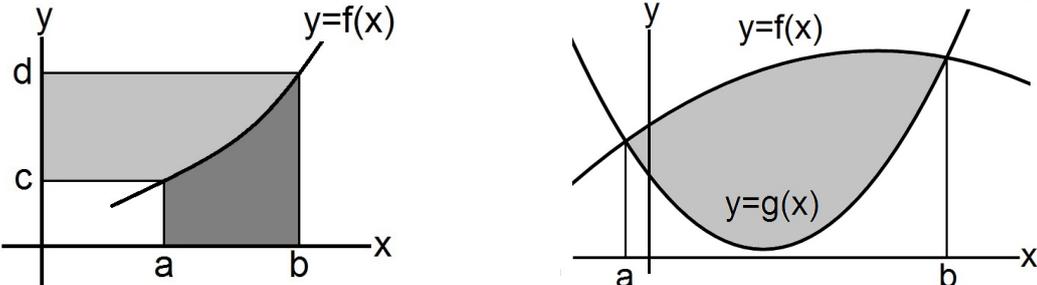
Zahlenfolgen	<p>Bezeichnen <math>a_n</math> und <math>b_n</math> zwei <b>konvergente Zahlenfolgen</b> mit <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A</math> und <math>\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B</math> und sei weiter <math>C</math> eine Konstante, dann gilt</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot a_n) = C \cdot A$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \text{ falls } B \neq 0$ <hr/> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-s} = 0, \text{ falls } s > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ falls } -1 < q < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^s \cdot q^n = 0, \text{ falls } -1 < q < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
Funktionen	<p>Eine Funktion <math>f(x)</math> heisst <b>stetig</b> an der Stelle <math>c</math>, falls gilt <math>\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)</math></p> <hr/> <p>Für die beiden Funktionen <math>f(x)</math> und <math>g(x)</math> gelte <math>\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A</math> und <math>\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B</math>, zudem sei <math>D</math> eine Konstante.</p> <p><math>c</math> ist Element der Menge <math>\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}</math>, <math>A</math>, <math>B</math> und <math>D</math> sind Elemente von <math>\mathbf{R}</math>.</p> $\lim_{x \rightarrow c} (D \cdot f(x)) = D \cdot A$ $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ falls } B \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(B), \text{ falls } f(x) \text{ stetig an der Stelle } B \text{ ist.}$ <hr/> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{Bemerkung: } x \text{ im Bogenmass!}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^s} = 0, \text{ für } s > 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^s \cdot q^x = 0, \text{ für } -1 < q < 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^s \cdot q^x = \infty, \text{ für } q > 1$

## 9 Differentialrechnung

Definition	<p>Ableitungsfunktion <math>f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}</math></p> <p>Übliche Bezeichnungen für die Ableitungsfunktion sind <math>f'(x)</math> oder <math>\frac{df(x)}{dx}</math>.</p> <p>Die Ableitungsfunktion der Ableitung <math>f'(x)</math> heisst die <i>zweite Ableitung</i> und wird mit <math>f''(x)</math>, <math>f^{(2)}(x)</math> oder <math>\frac{d^2 f(x)}{dx^2}</math> bezeichnet.</p>			
Ableitungsregeln Grundfunktionen		$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
	<b>Potenzfunktionen</b>	$x^n$	$\rightarrow$	$n \cdot x^{n-1}$
		$x$	$\rightarrow$	1
		$c$	$\rightarrow$	0
		$c \cdot x$	$\rightarrow$	$c$
		$\sqrt{x}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
		$\frac{c}{x}$	$\rightarrow$	$-\frac{c}{x^2}$
	<b>Exponentialfunktionen</b>	$e^x$	$\rightarrow$	$e^x$
		$e^{cx}$	$\rightarrow$	$e^{cx} \cdot c$
		$c^x$	$\rightarrow$	$c^x \cdot \ln(c)$
	<b>Logarithmusfunktionen</b>	$\ln(x)$	$\rightarrow$	$\frac{1}{x}$
		$\log_c(x)$	$\rightarrow$	$\frac{1}{x \cdot \ln(c)}$
	<b>Trigonometr. Funktionen</b>	$\sin(x)$	$\rightarrow$	$\cos(x)$
		$\cos(x)$	$\rightarrow$	$-\sin(x)$
		$\tan(x)$	$\rightarrow$	$1 + \tan^2(x)$
Ableitungsregeln Zusammensetzungen		$f(x)$	$\rightarrow$	$f'(x)$
	<b>Summenregel</b>	$u(x) \pm v(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \pm v'(x)$
		$u(x) \pm v(x) \pm w(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \pm v'(x) \pm w'(x)$
	<b>Konstantenregeln</b>	$c \cdot u(x)$	$\rightarrow$	$c \cdot u'(x)$
		$\frac{u(x)}{c}$	$\rightarrow$	$\frac{u'(x)}{c}$
		$\frac{c}{c}$	$\rightarrow$	0
	<b>Produktregel</b>	$u(x) \cdot v(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
		$u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$	$\rightarrow$	$u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$
	<b>Quotientenregel</b>	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\rightarrow$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
		$\frac{u(x)}{c}$	$\rightarrow$	$-\frac{u'(x)}{c}$
		$\frac{c}{v(x)}$	$\rightarrow$	$-\frac{c \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
	<b>Kettenregel</b>	$u(v(x))$	$\rightarrow$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$
		$u(v(w(x)))$	$\rightarrow$	$u'(v(w(x))) \cdot v'(w(x)) \cdot w'(x)$

Bedeutung der Ableitung	<p><math>y</math>-Wert = Funktionswert <math>f(x)</math></p> <p><math>f(x) &gt; 0 \Leftrightarrow</math> P. oberhalb <math>x</math>-Achse; <math>f(x) &lt; 0 \Leftrightarrow</math> P. unterh. <math>x</math>-Achse; <math>f(x) = 0 \Leftrightarrow</math> Nullstelle.</p> <p>Steigung <math>f'(x)</math></p> <p><math>f'(x) &gt; 0 \Leftrightarrow</math> Kurve <i>steigend</i>; <math>f'(x) &lt; 0 \Leftrightarrow</math> Kurve <i>fallend</i>; <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow</math> <i>stationäre Stelle</i>.</p> <p>Modifizierte Krümmung <math>f''(x)</math></p> <p><math>f''(x) &gt; 0 \Leftrightarrow</math> <i>Linkskurve</i>; <math>f''(x) &lt; 0 \Leftrightarrow</math> <i>Rechtskurve</i>; <math>f''(x) = 0 \Leftrightarrow</math> Kurve <i>ungekrümmt</i>.</p> <hr/> <p><b>Krümmung</b> <math>\mathcal{K} = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}</math>      <b>Krümmungsradius</b> <math>\mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{K}} = \frac{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}{f''(x)}</math></p>
Kurven-diskussion	<p>1) <b>Nullstellen</b> <math>f(x) \stackrel{!}{=} 0</math></p> <p>Eine Nullstelle heisst von Ordnung <math>n</math>, falls</p> <p><math>f(x) = f'(x) = \dots f^{(n-1)}(x) = 0</math> aber <math>f^{(n)}(x) \neq 0</math></p> <p>2) <b>Extrema</b> <math>f'(x) \stackrel{!}{=} 0</math></p> <p>gilt <math>\begin{cases} f''(x) &lt; 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum} \\ f''(x) &gt; 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum} \\ f''(x) = 0 \Rightarrow (*) \end{cases}</math></p> <p>(*) Verhalten der Ableitung <math>f'(x)</math> für wachsende <math>x</math>-Werte beim Durchgang durch die untersuchte Stelle ...</p> <p><math>f'(x)</math> wechselt das Vorzeichen von + über 0 zu - <math>\Rightarrow</math> lokales Maximum</p> <p><math>f'(x)</math> wechselt das Vorzeichen von - über 0 zu + <math>\Rightarrow</math> lokales Minimum</p> <p><math>f'(x)</math> wechselt das VZ von + über 0 zu + nicht oder von - über 0 zu - nicht <math>\Rightarrow</math> <i>Terrassenpunkt</i></p> <p>3) <b>Wendepunkte</b> <math>f''(x) \stackrel{!}{=} 0</math></p> <p>gilt <math>\begin{cases} f'''(x) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt} \\ f'''(x) = 0 \Rightarrow (**) \end{cases}</math></p> <p>(**) Verhalten der Ableitung <math>f''(x)</math> für wachsende <math>x</math>-Werte beim Durchgang durch die untersuchte Stelle ...</p> <p><math>f''(x)</math> wechselt das Vorzeichen von + über 0 zu - oder von - über 0 zu + <math>\Rightarrow</math> Wendepunkt</p> <p><math>f''(x)</math> wechselt das VZ von + über 0 zu + nicht oder von - über 0 zu - nicht <math>\Rightarrow</math> kein Wendepunkt</p> <p><b>Sattelpunkt = Terrassenpunkt = Wendepunkt mit Steigung 0</b></p>
Tangente	<p><b>Tangente</b> an der Stelle <math>x_1 \Rightarrow y = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)</math></p>
Newton-verfahren	<p>Gesucht sind die Lösungen der Gleichung <math>f(x) = 0</math></p> <p><b>Näherungsverfahren von Newton (Tangentenverfahren).</b></p> <p>1) Wähle Startpunkt <math>x_1</math></p> <p>2) Berechne <math>x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}</math>.</p> <p>3) Falls <math>x_2 = x_1</math> dann ist <math>x_2</math> eine Lösung von <math>f(x) = 0</math>, andernfalls verwende das erhaltene <math>x_2</math> als neues <math>x_1</math> und gehe zu 2).</p> 

## 10 Integralrechnung

Definition	<p>1) Das <i>unbestimmtes Integral</i> <math>\int f(x) dx</math> ist eine Menge von Funktionen.  <math>\int f(x) dx =</math> Menge aller <i>Stammfunktionen</i> von <math>f(x)</math>  <math>=</math> Menge aller Funktionen <math>F(x)</math> mit Eigenschaft <math>F'(x) = f(x)</math>.</p> <hr/> <p>Ist <math>F_1(x)</math> irgend eine Stammfunktion von <math>f(x)</math>, so ist jede weitere Stammfunktion von der Form <math>F(x) = F_1(x) + C</math> mit einer Konstanten <math>C \in \mathbb{R}</math>.  Man schreibt <math>\int f(x) dx = F_1(x) + C</math>.  <math>C</math> heisst <i>Integrationskonstante</i>.</p> <hr/> <p>2) Das <i>bestimmte Integral</i> <math>\int_a^b f(x) dx</math> ist eine Zahl.  <math>a</math> und <math>b</math> heissen die <i>Integrationsgrenzen</i>.  <math>\int_a^b f(x) dx =</math> Flächeninhalt eingeschlossen von unten durch die <math>x</math>-Achse von oben durch die Kurve <math>y = f(x)</math> von links durch die Gerade <math>x = a</math> und von rechts durch die Gerade <math>x = b</math>.</p> <hr/> <p>Flächenstücke unter der <math>x</math>-Achse haben <b>negatives Vorzeichen</b>. Ebenso wechselt das Vorzeichen, wenn linke und rechte <b>Grenze vertauscht</b> sind.</p>
Hauptsatz	<p><b>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</b>  Bezeichne <math>F(x)</math> irgend eine Stammfunktion von <math>f(x)</math>, also <math>F(x) \in \int f(x) dx</math> (unbestimmtes Integral).  Dann gilt <math>\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)</math> (bestimmtes Integral).  Der Hauptsatz führt somit das bestimmte Integral auf das unbestimmte Integral zurück!</p>
Zusammensetzen	<p><b>Unterteilen</b> <math>\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx</math>  <b>Vertauschte Grenzen</b> <math>\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx</math>  <b>Leeres Integral</b> <math>\int_a^a f(x) dx = 0</math></p>
Anwendungen 1	<p><i>Fläche</i> zwischen Kurve und <math>x</math>-Achse <math>A = \int_a^b f(x) dx</math>  <i>Volumen</i> bei Rotation um <math>x</math>-Achse <math>V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx</math>  Zwischen zwei Kurven ... <i>Fläche</i> <math>A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx</math>  ... <i>Volumen</i> bei Rotation um <math>x</math>-Achse <math>V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx</math></p> 

Anwendungen 2	<p>Volumen bei Rotation um y-Achse <math>V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 \cdot dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 f'(x) dx</math></p> <p>Bogenlänge <math>\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx</math></p> <p>Oberfläche bei Rotation um x-Achse <math>O_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx</math></p> <p><b>Oberfläche, Rotation um y-Achse</b> bei Rotation um y-Achse <math>O_y = 2\pi \cdot \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx</math></p>		
Integrationsregeln Grundfunktionen		$f(x)$	$\rightarrow F(x)$
	<b>Potenzfunktionen</b>	$x^n \quad (n \neq -1)$	$\rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$
		$\frac{c}{x} = c \cdot x^{-1}$	$\rightarrow c \cdot \ln( x )$
		$c$	$\rightarrow cx$
		$cx$	$\rightarrow \frac{c \cdot x^2}{2}$
		$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\rightarrow \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2x^{3/2}}{3}$
		$\frac{c}{x^2} = c \cdot x^{-2}$	$\rightarrow \frac{c \cdot x^{-1}}{-1} = -\frac{c}{x}$
	<b>Exponentialfunktionen</b>	$e^x$	$\rightarrow e^x$
		$e^{cx}$	$\rightarrow \frac{e^{cx}}{c}$
		$e^{-x}$	$\rightarrow \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$
		$c^x$	$\rightarrow \frac{c^x}{\ln(c)}$
		$x \cdot e^{cx}$	$\rightarrow \frac{cx - 1}{c^2} \cdot e^{cx}$
		$x \cdot c^x$	$\rightarrow \frac{x \ln(c) - 1}{(\ln(c))^2} \cdot c^x$
	<b>Logarithmenfunktionen</b>	$\ln(x)$	$\rightarrow x \cdot (\ln(x) - 1)$
		$\log_c(x)$	$\rightarrow \frac{x \cdot (\ln(x) - 1)}{\ln(c)}$
	<b>Trigono. Funktionen</b>	$\sin(x)$	$\rightarrow -\cos(x)$
		$\cos(x)$	$\rightarrow \sin(x)$
		$\tan(x)$	$\rightarrow -\ln( \cos(x) )$
	<b>Normalverteilung</b>	$\text{normalpdf}(x, \mu, \sigma)$	$\rightarrow \text{normalcdf}(-1E99, x, \mu, \sigma)$
Integrationsregeln Zusammensetzungen		$f(x)$	$\rightarrow F(x)$
	<b>Summenregel</b>	$u(x) \pm v(x)$	$\rightarrow U(x) \pm V(x)$
		$u(x) \pm v(x) \pm w(x)$	$\rightarrow U(x) \pm V(x) \pm W(x)$
	<b>Konstantenregeln</b>	$c \cdot u(x)$	$\rightarrow c \cdot U(x)$
		$\frac{u(x)}{c}$	$\rightarrow \frac{U(x)}{c}$
		$c$	$\rightarrow cx$
	<b>Lineare Kettenregel</b>	$u(c_1x + c_2)$	$\rightarrow \frac{U(c_1x + c_2)}{c_1}$

## 11 Kombinatorik

Permutationen	<p>1 Wieviele verschiedene Worte lassen sich aus <math>n</math> Zeichen unter Verwendung aller <math>n</math> Zeichen bilden, wenn <b>alle Zeichen verschieden</b> sind?</p> <p><math>\Rightarrow n!</math> <span style="float: right;"><math>n</math> Fakultät = <math>n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1</math></span></p> <p>2 Wieviele verschiedene Worte lassen sich aus <math>n</math> Zeichen unter Verwendung aller <math>n</math> Zeichen bilden, wenn jeweils <math>k_1, k_2, \dots, k_s</math> <b>Zeichen identisch</b> sind?</p> <p><math>\Rightarrow \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_s!}</math></p>
Variationen	<p>1 Wieviele verschiedene Worte der Länge <math>s</math> lassen sich aus einem Zeichensatz von <math>n</math> verschiedenen Zeichen bilden? Bei erlaubter <b>Mehrfachverwendung</b> der Symbole</p> <p><math>\Rightarrow n^s</math></p> <p>2 Wieviele verschiedene Worte der Länge <math>s</math> lassen sich aus einem Zeichensatz von <math>n</math> verschiedenen Zeichen bilden? Bei <b>Einfachverwendung</b> der Symbole</p> <p><math>\Rightarrow \frac{n!}{(n-s)!}</math> <span style="float: right;">es gilt <math>\frac{n!}{(n-s)!} = \binom{n}{s} \cdot s!</math></span></p>
Kombinationen	<p>1 Auf wieviele Arten kann man aus <math>n</math> Objekten <math>s</math> aussuchen? Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge des Aussuchens an.</p> <p><math>\Rightarrow \binom{n}{s}</math> <span style="float: right;">Binomialkoeffizient <math>\binom{n}{s} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-s+1)}{s!} = \frac{n!}{(n-s)! \cdot s!}</math></span></p> <p>2 Auf wieviele Arten kann man aus <math>n</math> Objekten <math>s</math> aussuchen? Es kommt dabei nicht auf die Reihenfolge des Aussuchens an. Die Objekte dürfen jetzt aber auch <b>mehrfach gewählt</b> werden!</p> <p><math>\Rightarrow \binom{n}{s}^* = \binom{n+s-1}{s}</math></p>

## 12 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Begriffe	<p><i>Ereignisse</i> = <b>Teilmengen</b> der Grundmenge <math>\Omega</math>.</p> <p><math>\Omega</math> heisst das <i>sichere Ereignis</i>, <math>\phi = \{\}</math> heisst das <i>unmögliche Ereignis</i>.</p> <p>Das <i>Gegenereignis</i> oder Komplement eines Ereignisses <math>A</math> ist <math>\bar{A} = \Omega \setminus A</math>.</p> <p><i>Elementarereignisse</i> sind einelementige Teilmengen der Grundmenge <math>\Omega</math>.</p> <p>Die Funktion <math>P</math> ordnet jedem Ereignis seine <i>Wahrscheinlichkeit</i> zu.</p>
Eigenschaften von $P$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1 <math>P(A) \geq 0</math></li> <li>2 <math>P(\phi) = 0</math></li> <li>3 <math>P(\Omega) = 1</math></li> <li>4 <b>Additivität</b> <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math></li> <li>5 <math>A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)</math></li> <li>6 <b>Gegenereignis</b> <math>P(\bar{A}) = 1 - P(A)</math></li> <li>7 <b>Inklusions-Exklusions-Formel</b>  <math display="block">P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)</math> </li> </ol>
Laplace-Definition	<p><i>Laplacedefinition der Wahrscheinlichkeit</i></p> <p>Voraussetzung: Alle Elementarereignisse sind gleich wahrscheinlich.</p> <p>Dann rechnet sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis <math>A</math> als</p> $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{\text{günstige Fälle für } A}{\text{mögliche Fälle}}$
Baumdiagramm	<p><b>Die 3 Pfadregeln</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 Wahrscheinlichkeiten längs der Pfade werden multipliziert.</li> <li>2 Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade werden addiert.</li> <li>3 Alle Äste unterhalb eines Knotens addieren sich zu Wahrscheinlichkeit 1.</li> </ol> <div style="text-align: center;"> </div> <p>Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe sind totale (=unbedingte) Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeiten der unteren Stufen sind bedingte Wahrscheinlichkeiten.</p>
Bedingte Wahrscheinlichkeit	<p><i>Bedingte Wahrscheinlichkeit</i></p> <p><math>P(A   B)</math> = Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis <math>A</math> eintritt, wenn man schon weiss, dass Ereignis <math>B</math> eintritt.</p> $P(A   B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ <p><math>A</math> und <math>B</math> heissen <i>unabhängig</i>, falls</p> $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$ <p>Dies hat nämlich zur Folge</p> $P(A   B) = P(A   \bar{B}) = P(A) \quad (\text{falls } 0 < P(B) < 1) \text{ und}$ $P(B   A) = P(B   \bar{A}) = P(B) \quad (\text{falls } 0 < P(A) < 1)$

<p>Multiplikations- und Additionssatz</p>	<p><b>Multiplikationssatz</b> <math>P(A \cap B) = P(A   B) \cdot P(B)</math></p> <p>Für <b>unabhängige Ereignisse</b> gilt sogar <math>P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)</math></p> <p><b>Additionssatz</b> <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math></p> <p>Für <b>unvereinbare Ereignisse</b> gilt sogar <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B)</math></p> <hr/> <p>Sei <math>\Omega</math> in die unvereinbaren Ereignisse <math>A_j</math> zerlegt, also <math>\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j</math>.</p> <p>Für jedes Ereignis <math>B</math> gelten dann</p> <p><i>Formel von der totalen (= unbedingten) Wahrscheinlichkeit</i></p> $P(B) = \sum_{j=1}^n P(B   A_j) \cdot P(A_j)$ <p><i>Formel von Bayes</i></p> $P(A_j   B) = \frac{P(B   A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{j=1}^n P(B   A_j) \cdot P(A_j)}$ <p>Die beiden Formeln ergeben sich auch direkt am Baumdiagramm!</p>
<p>Diskrete Zufallsvariablen</p>	<p>Eine <i>diskrete Zufallsvariable</i> <math>X</math> nimmt die Werte <math>x_k</math> mit den Wahrscheinlichkeiten <math>p_k</math> an (<math>1 \leq k \leq n</math>), man spricht von der <i>Wahrscheinlichkeitsverteilung</i> von <math>X</math>.</p> <p><i>Wahrscheinlichkeit</i> <math>P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_k \leq b} p_k</math></p> <p><i>Erwartungswert</i> <math>\mu = E(X) = \sum_{k=1}^n (x_k \cdot p_k)</math></p> <p><i>Varianz</i> <math>\sigma^2 = V(X) = \sum_{k=1}^n ((x_k - \mu)^2 \cdot p_k)</math></p> <p><i>Standardabweichung</i> <math>\sigma = S(X) = \sqrt{V(X)}</math></p> <p><i>Verschiebungssatz</i> <math>V(X) = E(X^2) - E(X)^2</math></p> <hr/> <p><i>Erwartungswertoperator</i> <math>E(g(X)) = \sum_{k=1}^n (g(x_k) \cdot p_k)</math></p>
<p>Stetige Zufallsvariablen</p>	<p>Eine <i>stetige Zufallsvariable</i> <math>X</math> hat die <i>Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion</i> <math>f(x)</math>.</p> <p><i>Wahrscheinlichkeit</i> <math>P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx</math></p> <p>Da <math>P(X = a) = 0</math> für eine stetige Zufallsvariable gilt, folgt dass auch <math>P(a &lt; X &lt; b) = P(a \leq X \leq b)</math> gilt.</p> <p><i>Erwartungswert</i> <math>\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx</math></p> <p><i>Varianz</i> <math>\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx</math></p> <p><i>Standardabweichung</i> <math>\sigma = S(X) = \sqrt{V(X)}</math></p> <p><i>Verschiebungssatz</i> <math>V(X) = E(X^2) - E(X)^2</math></p> <hr/> <p><i>Erwartungswertoperator</i> <math>E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx</math></p>

Binomial- verteilung	<p><b>Charakterisierung</b> <math>\Rightarrow</math> Ein Versuch mit zwei mögliche Ausgängen (Treffer mit Wahrscheinlichkeit <math>p</math> und Niete mit Wahrscheinlichkeit <math>1 - p</math>) wird <math>n</math> mal unabhängig wiederholt. Die Zufallsvariable <math>X</math> ist die Anzahl der in den <math>n</math> Versuchen erzielten Treffer. <math>X</math> ist eine diskrete Zufallsvariable.</p> <p><b>Wahrscheinlichkeit für <math>k</math> Treffer</b> <math>\Rightarrow P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = \text{binompdf}(n, p, k)</math></p> <p><b>Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer</b> <math>\Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n</math></p> <p><b>Wahrscheinlichkeit höchstens <math>b</math> Treffer</b> <math>\Rightarrow P(X \leq b) = \text{binomcdf}(n, p, b)</math></p> <p><b>Wahrscheinlichkeit mindestens <math>a</math> Treffer</b> <math>\Rightarrow P(X \geq a) = 1 - \text{binomcdf}(n, p, a - 1)</math></p> <p><b>Wahrscheinlichkeit für zwischen <math>a</math> und <math>b</math> Treffer</b>  <math>\Rightarrow P(a \leq X \leq b) = \text{binomcdf}(n, p, b) - \text{binomcdf}(n, p, a - 1)</math></p> <p><b>Erwartungswert</b> <math>\Rightarrow E(X) = \mu = n \cdot p</math></p> <p><b>Varianz</b> <math>\Rightarrow V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)</math></p> <p><b>Standardabweichung</b> <math>\Rightarrow S(X) = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}</math></p>
Geo- metrische Verteilung	<p><b>Charakterisierung</b> <math>\Rightarrow</math> Ein Versuch mit zwei mögliche Ausgängen (Treffer mit Wahrscheinlichkeit <math>p</math> und Niete mit Wahrscheinlichkeit <math>1 - p</math>) wird so lange wiederholt, bis der erste Treffer erscheint. Die Zufallsvariable <math>X</math> ist die Anzahl gebrauchter Versuche bis zum ersten Treffer. <math>X</math> ist eine diskrete Zufallsvariable.</p> <p><b>Wahrscheinlichkeit für <math>k</math> gebrauchte Versuche</b> <math>\Rightarrow P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}</math></p> <p><b>Erwartungswert</b> <math>\Rightarrow E(X) = \mu = \frac{1}{p}</math></p> <p><b>Varianz</b> <math>\Rightarrow V(X) = \sigma^2 = \frac{1 - p}{p^2}</math></p> <p><b>Standardabweichung</b> <math>\Rightarrow S(X) = \sigma = \sqrt{\frac{1 - p}{p^2}}</math></p>
Hypergeo- metrische verteilung	<p><b>Charakterisierung</b> <math>\Rightarrow</math> Aus einer Urne, enthaltend <math>w</math> weiße und <math>s</math> schwarze Kugeln, werden (ohne Zurücklegen) <math>n</math> Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable <math>X</math> ist die Anzahl der weißen Kugeln unter den <math>n</math> gezogenen. <math>X</math> ist eine diskrete Zufallsvariable.</p> <p><b>Wahrscheinlichkeit für <math>k</math> weiße Kugeln</b> <math>\Rightarrow P(X = k) = \frac{\binom{w}{k} \cdot \binom{s}{n - k}}{\binom{w + s}{n}}</math></p> <p><b>Erwartungswert</b> <math>\Rightarrow E(X) = \mu = \frac{n \cdot w}{w + s}</math></p> <p><b>Varianz</b> <math>\Rightarrow V(X) = \sigma^2 = \frac{(w + s - n) \cdot n \cdot w \cdot s}{(w + s - 1) \cdot (w + s)^2}</math></p> <p><b>Standardabweichung</b> <math>\Rightarrow S(X) = \sigma = \sqrt{\frac{(w + s - n) \cdot n \cdot w \cdot s}{(w + s - 1) \cdot (w + s)^2}}</math></p>

Normal-  
verteilung

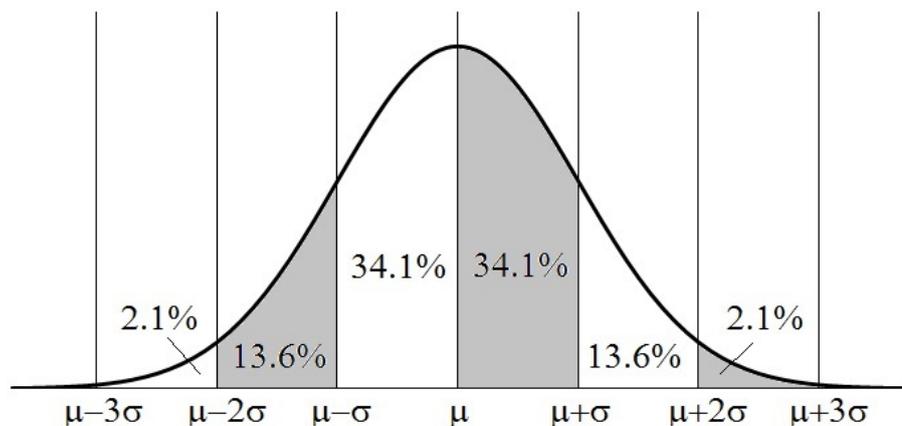
**Zentraler Grenzwertsatz**  $\Rightarrow$  Ein Versuch (Zufallsvariable  $X$ ) wird  $n$ -fach unabhängig wiederholt. Die  $X_i$  für  $1 \leq i \leq n$  seien die erzielten Resultate.

1) Die **Summe**  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  ist für grosses  $n$  annähernd normalverteilt mit  $\mu = n \cdot E(X)$  und  $\sigma = \sqrt{n \cdot V(X)}$ .

2) Der **Mittelwert**  $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$  ist für grosses  $n$  annähernd normalverteilt mit  $\mu = E(X)$  und  $\sigma = \sqrt{\frac{V(X)}{n}}$ .

Die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** einer Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  ist die

$$\text{Gauss'sche Glockenkurve normalpdf}(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



normalcdf( $a, x, \mu, \sigma$ ) (für beliebiges  $a$ ), ist eine **Stammfunktion** von normalpdf( $x, \mu, \sigma$ ).

Für eine  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  gilt

**Wahrscheinlichkeit**

$$\Rightarrow P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \text{normalpdf}(x, \mu, \sigma) dx = \text{normalcdf}(a, b, \mu, \sigma)$$

Bemerkung: Da  $P(X = a) = P(X = b) = 0$  ist, folgt  $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$

Bemerkung: Für den TR gilt  $-\infty = -1E99$  bzw.  $\infty = 1E99$

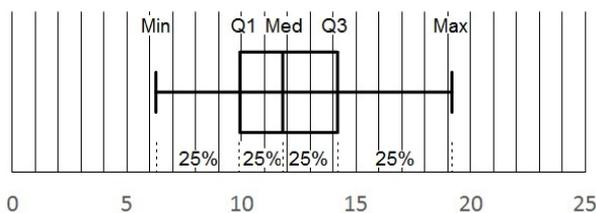
**Erwartungswert**  $\Rightarrow E(X) = \mu$

**Varianz**  $\Rightarrow V(X) = \sigma^2$

**Standardabweichung**  $\Rightarrow S(X) = \sigma$

## 13 Beschreibende Statistik

Kennwerte schätzen	<p>An einer <i>Stichprobe</i> treten für das <i>Merkmal</i> <math>X</math> die <math>k</math> Werte <math>x_i</math> (<math>i = 1, \dots, k</math>) mit den <i>absoluten Häufigkeiten</i> <math>n_i</math> auf.</p> <p>Die gesamte Anzahl der Messresultate <math>n = \sum_{i=1}^k n_i</math> heisst der <b>Umfang</b> der Stichprobe.</p> <p>Die <i>relative Häufigkeit</i> des Messwerts <math>x_i</math> ergibt sich zu <math>h_i = \frac{n_i}{n}</math></p> <p>Es wird angenommen, dass die Stichprobe durch zufällige Wahl aus der <i>Grundgesamtheit</i> gezogen wurde. Die Stichprobe heisst dann <i>repräsentativ</i> für die Grundgesamtheit.</p> <hr/> <p>Aus der Messung lassen sich folgende <i>Kennwerte</i> für das Merkmal <math>X</math> in der Grundgesamtheit schätzen:</p> <p>1 Erwartungswert <math>E(X) \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i \cdot n_i)}{n}</math></p> <p>2 Varianz <math>V(X) \Rightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k ((x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i)}{n - 1}</math></p> <p>3 Standardabweichung <math>S(X) \Rightarrow s = \sqrt{s^2}</math></p> <p>4 <math>q</math>-Quantil</p> <p><math>\Rightarrow</math> (1) Ordne die Resultate aufsteigend (Rang 1 bis Rang <math>n</math>).</p> <p>(2) Berechne <math>q \cdot (n + 1)</math> und zerlege das Resultat in ganzzahligen Teil <math>g</math> und Hinterkommateil <math>r</math>.</p> <p>(3) <math>q</math>-Quantil = 'Messwert Rang <math>g</math>' + <math>r \cdot</math> ('Messwert Rang <math>g + 1</math>' - 'Messwert Rang <math>g</math>')</p> <p>5 Der <i>Median</i> ist das 0.5-Quantil.</p> <p>6 Das <i>erste Quartil</i> (=erstes Viertel) ist das 0.25-Quantil.</p> <p>7 Das <i>dritte Quartil</i> (=drittes Viertel) ist das 0.75-Quantil.</p> <p>8 Im <i>Boxplot</i> zeichnet man den kleinsten Messwert (Min), das erste Quartil (Q1), den Median (Med), das dritte Quartil (Q3) und den grössten Messwert (Max) ein. Der Boxplot gibt einen groben Überblick über die Verteilung der Messresultate.</p>
Lineare Regression	<p>Gegeben sind die Datenpaare <math>(x_i, y_i)</math> für <math>i = 1, \dots, n</math>.</p> <p>Den besten* linearen Zusammenhang <math>\hat{y}(x) = mx + b</math> findet man, indem man <math>m</math> und <math>b</math> aus dem folgenden linearen Gleichungssystem ermittelt.</p> $\begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot m + \left( \sum_{i=1}^n 1 \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot m + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) \end{cases}$ <p>* in dem Sinne, dass die Summe der quadratischen Abweichungen <math>\sum_{i=1}^n (\hat{y}(x_i) - y_i)^2</math> minimal wird.</p>



## 14 Das Griechische Alphabet

Die 24 Griechischen Buchstaben										
	Name	gross	klein	↓	Name	gross	klein	↓		
1	Alpha	$A$	$\alpha$	a	13	Nü	$N$	$\nu$	n	
2	Beta	$B$	$\beta$	b	14	Xi	$\Xi$	$\xi$	x	
3	Gamma	$\Gamma$	$\gamma$	g	15	Omikron	$O$	$o$	o	
4	Delta	$\Delta$	$\delta$	d	16	Pi	$\Pi$	$\pi$	p	
5	Epsilon	$E$	$\epsilon$	e	17	Rho	$P$	$\rho$	r(h)	
6	Zeta	$Z$	$\zeta$	z	18	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$	s	
7	Eta	$H$	$\eta$	$\bar{e}$	19	Tau	$T$	$\tau$	t	
8	Theta	$\Theta$	$\theta$	th	20	Ypsilon	$Y$	$u$	y oder u	
9	Iota	$I$	$\iota$	i	21	Phi	$\Phi$	$\phi$	ph	
10	Kappa	$K$	$\kappa$	k	22	Chi	$X$	$\chi$	ch	
11	Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	l	23	Psi	$\Psi$	$\psi$	ps	
12	Mü	$M$	$\mu$	m	24	Omega	$\Omega$	$\omega$	$\bar{o}$	

## 15 Mathematische Symbole

Mathe- matische Symbole	Symbol	Bedeutung	Bereich
	$\pi$	Kreiszahl 3.1415926535...	
	$e$	Eulersche Zahl 2.7182818284...	
	$\wedge$	und	Logik
	$\vee$	oder	Logik
	$\neg$	nicht	Logik
	$\forall$	für alle	Logik
	$\exists$	es existiert ein	Logik
	$\cup$	vereinigt	Mengenlehre
	$\cap$	geschnitten	Mengenlehre
	$\setminus$	ohne	Mengenlehre
	$\in$	ist Element von	Mengenlehre
	$\subseteq$	ist Teilmenge von	Mengenlehre
	$\supseteq$	ist Obermenge von	Mengenlehre
	$\emptyset$	Leere Menge	Mengenlehre
	$\sum$	Summe	Algebra
	$\prod$	Produkt	Algebra
	$\Delta$	Differenz	Algebra
	$!$	Fakultät	Kombinatorik
	$\binom{n}{s}$	'n tief s', Binomialkoeffizient	Kombinatorik

## Stichwortverzeichnis

- $\Delta$ , 27
- $\cap$ , 27
- $\cup$ , 27
- $\exists$ , 27
- $\forall$ , 27
- $\in$ , 27
- $\neg$ , 27
- $\phi$ , 27
- $\pi$ , 27
- $\prod$ , 27
- $\setminus$ , 27
- $\subseteq$ , 27
- $\sum$ , 27
- $\supseteq$ , 27
- $\vee$ , 27
- $\wedge$ , 27
- $e$ , 27
  
- Ableitung, Bedeutung, 18
- Ableitung, zweite, 17
- Ableitungsfunktion, 17
- Ableitungsregeln, 17
- Abschnittsform einer Ebene, 14
- Absolute Haeufigkeit, 26
- Abstandsprobleme, 15
- Abzinsen, 5
- Additivitaet, Wahrscheinlichkeit, 22
- Allgemeines Dreieck, 7
- Ankathete, 6
- Arithmetische Folge, 4
- Arithmetische Folge, explizite Darstellung, 4
- Arithmetische Folge, Rekursive Darstellung, 4
- Arithmetische Folge, Summenformel, 4
- Aufzinsen, 5
- Aufzinsfaktor, 5
  
- Basiswechsel, Logarithmen, 4
- Baumdiagramm, 22
- Bayes, Formel von, 23
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, 22
- Bestimmtes Integral, 19
- Betrag eines Vektors, 13
- Binomialkoeffizient, 3
- Binomialverteilung, 24
- Binomischer Lehrsatz, 3
- Bogenlaenge, 20
- Bogenlaenge, Kreis, 9
- Bogenmass, 6
- Boxplot, 26
  
- cos, 6
- Cosinussatz, 7
  
- deg, 6
- Differenzenquotient, 12
- Diskrete Zufallsvariable, 23
- Diskrete Zufallsvariablen, 23
- Diskriminante, 3
- Drachen, 8
- Dreieck, allgemein, 8
- Dreieck, gleichseitig, 8
- Dreieck, rechtwinklig, 8
  
- Ebene, 14
- Ebene, Koordinatenform, 14
- Ebene, Parameterform, 14
- Ebenen, echt parallel, 15
- Ebenen, schneidend, 15
- Ebenen, spezielle Lagen, 14
- Ebenen, zusammenfallend, 15
- Ebenengleichungen aufstellen, 15
- Einheitskreis, 6
- Elementarereignis, 22
- Ereignis, 22
- Erwartungswert, 23, 26
- Erwartungswertoperator, 23
- Eulersche Relation, 7
- Eulersche Zahl, 4, 16
- Exponentielles Wachstum, 5
- Extrema, 18
  
- Fakultaet, 3
- Fallend, 18

Flaeche Dreieck, 7  
 Flaeche eines Dreiecks, 13  
 Flaeche zwischen Kurven, 19  
 Flaechenberechnung, 19  
 Flaechenfaktor, 11  
 Flaechensatz, 8  
 Folgen, Grenzwert, 16  
 Folgen, Konvergenz, 16  
 Folgen, Summenformeln, 5  
 Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit, 23  
 Fundamentalsatz der Algebra, 7  
 Funktionen, Grenzwert, 16  
 Funktionen, Stetigkeit, 16  
 Funktionswert, 18  
  
 Ganze Zahlen, 3  
 Gaussische Glockenkurve, 25  
 Gegenereignis, 22  
 Gegenkathete, 6  
 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen, 15  
 Geometrische Folge, 5  
 Geometrische Folge, Explizite Darstellung, 5  
 Geometrische Folge, Rekursive Darstellung, 5  
 Geometrische Folge, Summenformel, 5  
 Geometrische Verteilung, 24  
 Gerade, 12, 13  
 Gerade und Ebene, echt parallel, 15  
 Gerade und Ebene, schneidend, 15  
 Gerade, Hauptform, 12  
 Gerade, Normalform, 12  
 Gerade, Parameterform, 13  
 Gerade, Punkt-Steigungsform, 12  
 Gerade, Steigungswinkel, 12  
 Geraden, echt parallel, 15  
 Geraden, parallel, 12  
 Geraden, schneidend, 15  
 Geraden, Schnittwinkel, 12  
 Geraden, senkrecht, 12  
 Geraden, windschief, 15  
 Geraden, zusammenfallend, 15  
 Geradengleichungen aufstellen, 15  
 Gradmass, 6  
 griechisches Alphabet, 27  
  
 Grundebenen, 14  
 Grundgesamtheit, 26  
 Grundmenge, 22  
  
 Halbwertszeit, 5  
 Hauptebenen, 14  
 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 19  
 Heron, Formel von, 8  
 Hessesche Normalform einer Ebene, 14  
 Hoehensatz, 8  
 Hypergeometrische Verteilung, 24  
 Hypotenuse, 6  
  
 Imaginaere Einheit, 7  
 Inklusions-Exklusions-Formel, 22  
 Inkreisradius, 8  
 Integral, 19, 20  
 Integrationsgrenzen, 19  
 Integrationskonstante, 19  
 Integrationsregeln, 20  
  
 Kathetensatz, 8  
 Kennwerte, 26  
 Kettenregel, Ableiten, 17  
 Kombinationen, 21  
 Komplexe Zahl, Karthesische Form, 7  
 Komplexe Zahl, Polarform, 7  
 Komplexe Zahlen, 3  
 Komplexe Zahlenebene, 3  
 Komponente in eine Richtung, 13  
 Konjugiert komplexe Zahl, 7  
 Konstantenregeln, Ableiten, 17  
 Konstantenregeln, Integrieren, 20  
 Koordinatenebenen, 14  
 Kreis, 9, 12  
 Kreis, Hauptform, 12  
 Kreis, Mittelpunktsform, 12  
 Kreis, Polare, 12  
 Kreis, Tangente, 12  
 Kreiskegel, 11  
 Kreiskegelstumpf, 11  
 Kreiszyylinder, 10  
 Kruemmung, 18  
 Kruemmung, modifiziert, 18

Krümmungsradius, 18  
 Kugel, 11  
 Kugelsegment, 11  
 Kurvendiskussion, 18  
  
 Laengenfaktor, 11  
 Laplace-Definition der Wahrscheinlichkeit, 22  
 Lineare Kettenregel, Integrieren, 20  
 Lineare Regression, 26  
 Lineares Wachstum, 5  
 Linkskurve, 18  
 Logarithmengesetze, 4  
 Lokales Maximum, 18  
 Lokales Minimum, 18  
  
 Mathematische Symbole, 27  
 Median, 26  
 Merkmal, 26  
 Mittelpunkt einer Strecke, 13  
  
 Natuerliche Zahlen, 3  
 Natuerlicher Logarithmus, 4  
 Newtonverfahren, 18  
 Normalverteilung, 25  
 Nullstellen, 18  
  
 Oberflaeche, Rotation um x-Achse, 20  
 Ortsvektor, 13  
  
 Parabel, 12  
 Parabel, Hauptform, 12  
 Parabel, Nullstellen, 12  
 Parabel, Nullstellenform, 12  
 Parabel, Scheitel, 12  
 Parabel, Scheitelform, 12  
 Parabel, Scheitelpunkt, 12  
 Parallelogramm, 8  
 Peripheriewinkel, 9  
 Peripheriewinkelsatz, 9  
 Permutationen, 21  
 Potenzgesetze, 4  
 Prisma, 9  
 Produktansatz, 3  
 Produktregel, Ableiten, 17  
 Projizierende Ebenen, 14  
  
 Pyramide, 10  
 Pyramidenstumpf, 10  
 Pythagoras, 8  
  
 Quader, 10  
 Quadrat, 8  
 Quadratische Gleichung, 3  
 Quantil, 26  
 Quartile, 26  
 Quotientenregel, Ableiten, 17  
  
 rad, 6  
 Rationale Zahlen, 3  
 Rechenoperationen in  $\mathbb{C}$ , 7  
 Rechteck, 8  
 Rechtskurve, 18  
 Rechtwinkliges Dreieck, 6  
 Reelle Zahlen, 3  
 Reelle Zahlengerade, 3  
 Relative Haeufigkeit, 26  
 Renten, 5  
 repraesentativ, 26  
 Rhombus, 8  
  
 Sattelpunkt, 18  
 Schnittprobleme, 15  
 Schwerpunkt eines Dreiecks, 13  
 Sehnensatz, 9  
 Sehnentangentenwinkel, 9  
 Sekantensatz, 9  
 Sektorflaeche, Kreis, 9  
 Sicheres Ereignis, 22  
 sin, 6  
 Sinussatz, 7  
 Skalarprodukt, 13  
 Spuren einer Ebene, 14  
 Spurpunkte einer Geraden, 14  
 Stammfunktion, 19  
 Standardabweichung, 23, 26  
 Stationaere Stelle, 18  
 Steigend, 18  
 Steigung, 18  
 Steigung einer Geraden, 12  
 Stetige Zufallsvariable, 23

Stetige Zufallsvariablen, 23  
 Stichprobe, 26  
 Stichprobenumfang, 26  
 Streckungen, 11  
 Summenregel, Ableiten, 17  
 Summenregel, Integrieren, 20  
  
 tan, 6  
 Tangentengleichung, 18  
 Teilpunkt einer Strecke, 13  
 Terrassenpunkt, 18  
 Tetraeder, 10  
 Trapez, 8  
 Trigonometrische Funktionen, 6  
 Trigonometrische Identitäten, 6  
  
 Umkreisradius, 7  
 Unabhaengigkeit, stochastische, 22  
 Unbestimmtes Integral, 19  
 Unendliche geometrische Reihe, 5  
 Ungekrümmt, 18  
 Unmoegliches Ereignis, 22  
  
 Varianz, 23, 26  
 Variationen, 21  
 Vektor zwischen zwei Punkten, 13  
 Vektorprodukt, 13  
 Verdoppelungszeit, 5  
 Verschiebungssatz, 23  
 Vierecke, 8  
 Vieta, Satz von, 3  
 Volumen, Rotation um x-Achse, 19  
 Volumen, Rotation um y-Achse, 20  
 Volumenfaktor, 11  
  
 Wachstumsfaktor, 5  
 Wahrscheinlichkeit, 22, 23  
 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, 23  
 Wahrscheinlichkeitsrechnung, 22  
 Wahrscheinlichkeitsverteilung, 23  
 Wendepunkt, 18  
 Winkel zwischen zwei Vektoren, 13  
 Winkelhalbierender Vektor, 13  
 Winkelmass, 6  
 Winkelprobleme, 15  
 Winkelsumme, 7  
 Wuerfel, 10  
  
 y-Achsenabschnitt einer Geraden, 12  
 y-Wert, 18  
  
 Zahlenmengen, 3  
 Zehnerlogarithmus, 4  
 Zentraler Grenzwertsatz, 25  
 Zentriwinkel, 9  
 Zinseszins, 5  
 Zufallsvariablen, 23  
 Zuwachsrage, effektiv, 5  
 Zuwachsrage, stetig, 5

